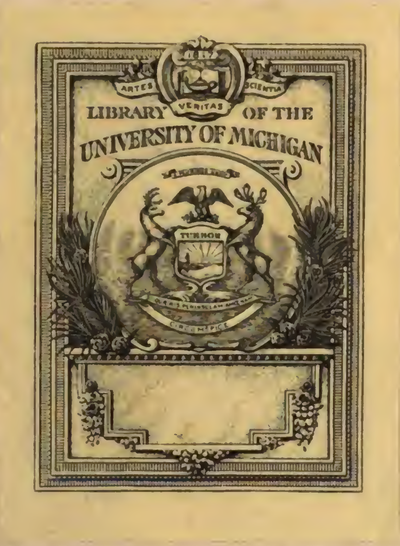

ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE

INCLINATIONVM APPENDIX

Seù τὸ GEOMETRIÆ ΠΛΗΡΩΜΑ

PER

ANTONIVM SANCTINIVM
LVCENSEM
C. R. S. ac in
Almo VRBIS Gymnasio Professorem.



MACERATÆ,

Ex Typographia Philippi Camaccij. M.DC.XLVIII.

Superiorum Permissu.



Illuſtriſſimo, ac Excellentiſſimo Domino

ANDREÆ IVSTINIANO

PRINCIPI BASSANI,

Ac S. D. N. INNOCENTII PP. X. Nepoti

S.



EOMETRÆ quippe veteres P. E. vt pro felici, quo fuerant ingenio donati, facultatem hanc præclaris adornarent inuentis, immenſis ſanè laboribus, longè acutiores appoſuere induſtrias; attamen non modicū experti, quouis conatu, quædam educere minimè licuiſſe, ſibi illico ſuaſerant, citra reatum alienis à proprio potuerint commendari generibus; exindè quibus locum Geometria denegat, non pauca è Mechanicis inuecta fuere molimina, & valdè mirum fuerat, inter eorum Authores magnus ille accenſeri Pergæus, quum è doctrina ab eo inclinationum propoſita, vnico problemate cuncta inquiſita potuerint accuratè perfici, ac exhiberi; Indicium planè perſpicuum haud eorum perſpectam habuerit omnium ſolutionem, quæ aliquando contemplanti mihi in animum induxerant eximij illi veteres, ex ritè parum collecto enthymemate, ſe & alios illuſiſſe; immò & vlterius ſe inſinuabat cogitatio, quod ſcilicet in ipſa re, dioptram oblique ad ſcopum collimauerint: ex legibus namque Dialecticorum habetur haud rectè conſequi, nempè ex quo ſedulò inquiſita res inuenta non fuerit,

 idcir-

idcirco suo non comprehendi, ac ineße genere: nusquàm planè reperitur eius amplitudinis recessus, ac cuncta perlustrasse diuerticula, quæ adhuc animum adiecerant; vt agelli tàm destituti lubens culturam susceperim exercendam, quare post glebarum euersa reiectaue plurima, qui factum (sincerè ignorare me fateor) fortasse benignitate genij dixerim verius oblatum, quam inuentum quæsitum, cuius Compositio admodum simplex, quam Geometria ipsa suppeditat, in altum me adduxerat stuporem, quo scilicet modo per tot sæcula præstantissimos potuerit latère Cultores, lusus quippè dicerem Naturæ fuiße, quæ soleat suum quandoque sublimioribus subducere influxum, & alijs porrò ingenijs gestiat explicare sinum.

Opusculum igitur hoc, & quæpiam non minus inopinata affert, Tuoque P. E. Nomini nuncupandum mea erga Te deuotio, ac obseruantia postulabat, vt aliquo attestari documento, & paruum quippè si molem, at prole eius fæcundissima, adultum intuenti protinus apparebit, qualecumque illud sane fuerit, si ad animi, qua optime non ignoras oblatum. Inclinationem aspexeris, pro ea qua ditatus es benignitate, humanissimè à Te con p'ecti sum ratus.

Cæterum ad encomia stilum auertere, præsens quippè inhibet Institutum, & quis quæso pro dignitate credat, vel compendio indicari quæ pro Amplissimis vndiquè Meritis singulares prosequutæ sunt historiæ? De Illustrissima familiæ Prosapia, de Heroibus, Dominio, Proauorumuè in rebus gerendis præstantia, de Purpuræ splendore pauca enunciari non decet, verum eiusmodi, vt extera quodammodo haberi queunt, quæ deindè personam comitantur, indiuidua

plane

planè illa ſunt, & propria, Dotes, nimirum virtutes exercitio comparatæ, Studia, animi Moderatio in proſperis, Mentis Conſtantia in arduis, Temperantia, & in omnibus Magnificentia: hæc & alia quamplurima, quæ diſertiſſimi poſtularent oratoris eloquium ſilentio preteream, mihi tamen fiat indultum proloqui, quod cenſeam verius, ab artis ſcilicet facundia, quæ protinus fluens, ac ſæpius ex induſtria plurima adfectare didicit, minimè ſunt exoptanda encomia, verum è proprio rerum geſtarum tenore, qui ſe conſtantèr moderatur, ſincerius colligendæ ſunt laudes, eoque facilius imprimuntur, & ad æmulationem frequentiùs excitant: Ideò tam cumulatè, quæ in Te ſuſpici optimè queunt, haud paucis in exemplum haberi merito decerent. V.

Illuſtriſs. ac Excellentiſs. D. T.

Deuotiſſimus
Antonius Sanctinius.

INGENVO LECTORI S.

NVlla quippè facultas, nulla ars fuit vnquàm inter acquisitas, quę in sua primęua origine totam recepisset pulchitudinem, quin nouis deindè accessionibus, specie fieret illustrior: neque in re admodum scita afferenda sunt exempla, verùm in mathesi præstantissimi industria authores, tam accuratè culturam exercuere, vt quam maximè liceat ambigi, an in illo antiquorum (quod dixerant) sapientissimo, vel à duobus proximè sęculis extiterit fæcundiorem, in hoc tamèn conueniunt vniuersi, vnum geometriæ agellum ab omnibus fuisse renuntiatum, & ad excolendum neglectum, vt pro eòdem conqueri nullatenus facultas quiesceret, quò etenim vberiores, ignotum minimè erat, expectari messes, eò amplius magis hærerent, & suos labores subducerent, quare siuè indignata, siuè impatiens effecta tandem, vt hoc dedecus aliquando à se properet commendari vtcumque sibi consultum voluit: Idcircò quæ hoc opusculo prodeunt industriorem expectant manum, nobis quidem satis fuerit primùm indigitasse, haud facultati impossibilia, immò parabilia admodum, quæ ad illius Culmen optimè pertinere enunciarunt omnes, errata postea, quæ nostra erunt humanitati indiuidua, benignè indulgenda confidimus, & quæ ex vitio typis consueto habentur, emendari licebit, nec omnia prosequuti sumus minutiora Vale.

Cum à nostris Prædecessoribus facta fuerit R. P. D. Antonio Sanctinio nostræ Congregationis Professo facultas imprimendi quoddam eius de rebus Geometricis opusculum, quatenus ad Nos spectat, eandem confirmamus. Datum Papiæ in Collegio nostro Sancti Maioli IX. Kal. Aprilis. 1648.

D. Io: Baptista Spinola Vic. Gener. Congregationis Somaschæ.

Si placet Illustris. & Reuerendiss. D. D. Papirio de Siluestris Episc. Maceratæ.

Imprimatur Fr. Vincentius de Gulijs Min. Conu. Sac. Theol. Magister, in Patria vniuersitate Philosophiæ Professor.

Imprimatur.

Ludouicus Signorius Vicarius Generalis, & Auditor.

Ego Iosephus Talianus Maceratensis Collegiatæ S. Saluatoris eiusdem Ciuitatis Canonicus, & Mathematicarum scientiarum ólim in hac Patria vniuersitate Professor, iubente Reuerendissimo P. F. Io: Vincentio Paulino Sacræ Theologię Magistro, ac Anconæ, & annexorum Generali Inquisitore Ordinis Prædicatorum, Opus inscriptum Geometriæ Appendix, & Inclinationum Parergon, authore Admodum R. P. D. Antonio Sanctinio Congregationis Somaschæ, atque in ālmo Vrbis Gymnasio præstantissimo Mathematices Interprete, attentè perlegi, & quia nihil inueni, quod aut Catholicæ Fidei obsit, aut mores lædat, immo noua, & scitu dignissima reperi, ideo, vt in lucem prodeat, & Typis mandetur, perutilè censeo. In quorum fidem, &c. Datum Maceratæ Kal. Iulij. 1648.

Iosephus Talianus, qui supra manu propria.

Imprimatur.

Fr. Io: Baptista Talianus Vicarius S. Officij Maceratæ Ord. Prædicatorum.

INCLINATIONVM GEOMETRIÆ APPENDIX.



Nclinationum doctrinam Apollonij Geometriæ cognomento magni, plurimis quippe sæculis apud doctissimũ Pappum cineribus vix respersis tumulatam, ipso collectionũ septimi Libri vestibulo, nostra tandem tempestate excitauit, ac præclarè Ghetaldus, duobusuè libellis distributam euulgauit, at pro vnico, & quidem generali problemate in operis aggressu statim obuio, non paucos, & sanè rationabiliter admirari percepimus, cur doctus auctor, & alioquin admodum accuratus, de eodem nec vllum indicasset verbum, ac silentio tàm alto illud dissimulare studuerit. Vt igitur quid super hoc à nobis sentiatur clarius concipiatur, oportunum satis erit eiusdem Apollonii in medium verba afferri, quę sunt sequentia, ex eodem Pappo desumpta.

„ *Duabus lineis positione datis, inter ipsas ponere rectam*
„ *magnitudine datam, quæ ad datum pertineat punctum*

Nec in dubium verti potest, in qualibet facultate, ac in mathesi præcipuè, magni semper fieri propositio-

nes, ac pręcepta generalia, ex eo vel maximè, quod plurima videantur ſtipari familia, dum ſingularia priuatim abſq; prole incedant; verum ne ſuper celebrium virorum fragmenta, quidpiam inædificari videamur voluiſſe nobis, tenemur dubio minimè ſuſpendere ſolutionem, & pro clariſſimo Ghetaldo de matheſi optimè merito, ac mihi dum ſupererat valde per litteras familiari reſponſum interpretari, idcircò á nemine euidenti quidem ratione infici poſſe ſupponimus, quò tribunal præſidendi authoritas ſibi non reperit, ad eam tamen ſpontè prouocantes, ſæpius non modica irrogari præiudicia. Verum vbi perpetuò primas rationi deferantur, vt in matheſi omnes fateri debent, nihil iri delatum authoritati, nihilominus illam adhuc, & ab immemorabili intruſam Ghetaldus repererat, quod planè in hiſce etiam candidati haud ignorant, quare plurimis cum prædeceſſoribus per quam clariſſimis, obductum ſibi ferè iter ad progreſſum habuerat, vnde inanem cenſuerat fore laborem, vltra quod effeciſſent ſapientiſſimi, proprias in hiſce exercere vires, præter propterquod apud eundem Pappum ex ſententia maiorum facilè obſeruaſſet ad XXXV propoſitionem quarti collectionum, indictum ferè omnibus.

„ *Datum quidem angulum, vel circumferentiam tripartito*
„ *ſecare ſolidum eſt, ſed datum angulum, vel circumferen-*
„ *tiam in data ratione ſecare lineare eſt.*

Ad eiusmodi effectionem inter cęteras generale problema illud dirigitur, vt in progeſſu oſtendetur, at decretum ſtilo tam dictatorio ab authore celeberrimo conſi-

consignatum litteris, non custodire piaculum fuisse cẽsuere plurimi, à quorum placitis diuertere supponimus noluisse Ghetaldum, exindè ad eadem spectasse attributa genera cogitasse, at amplius pro eodem facere videtur, & quod nobis arrideat magis est, illud idem generale problema vidisset, ab ipsa inclinationum doctrina expunctum, à Maximo huius nostri seculi Geometrarum clarissimo Vieta, qui in postulatum in suo Geometriæ supplemento comutauerat; igitur Ghetaldo admodum licitum fuerat agenti de argumento eodem, illud illibatum pertransisse.

Verũ ne quas optamus felices viri laudari manes, vel quispiam alius in vitium, haud facile expiandum, verteret, dum scilicet vnum á censura abiisse liberum volumus, & præstantissimum circumuenisse alterum, vnde oppido tenemur eiusmodi á nobis excutere labes, mihi etenim semper in animo fuerat, Ingenium Vietęum, maiore, quam credi posset, aut experiri liceat, passim fuisse adornatum lumine: Idcirco graui quodam sibimet noto consilio, problema illud reuocari voluerit ad vnicum principium, admodum simplex, vt scilicet interim à varia perplexaue operum mole, in effectionibus geometricis subducens, defectus supplerentur, & vt erat profũdę indaginis, quod facilè mihi suadeo, fortasse pręconceperat, quod tunc exhibuerat ex ordine mechanico, imposterum per legitimè concessa posse ad leges geometricas expurgando reuocari, vt sua demonstratione munitum secluso quocumq; scrupulo ab omnibus amplecti, namq; nec semel sumus experti, haud

valde liberalem ſe præbet naturę Genius, quod vni diuitias theſauri in totum promere aſſueſcat quin pro modico, quod auellere quiſpiam ſtudeat, laboris plurimum cogatur impendere, & ſæpius optata minimè aſſequi; in hanc igitur ſententiam inclinare me fecerant obſeruata Authoris non nulla verba, in aureo ſuo ad artem analyticem dictata libello, vbi inductum Poſtulatum, quaſi opus Geometricum enunciauerat, vel quia valde ſimplex erat, vel quod modicum diſtaſſet ab accurato, vel quod aliquando purificari ſuppoſuiſſet, eius namq; ſunt ſequentia verba.

„ 24 *Ad exegeticum in Geometricis ſelegit, ac recenſet ef-*
„ *fectiones magis canonicas, quibus æquationes laterum,*
„ *& quadratorum omninò explicantur.*
„ 25 *Ad cubos, & quadratoquadrata poſtulat, vt quaſi*
„ *Geometria ſuppleat Geometriæ defectus.*
„ *A quovis puncto ad duas quasvis lineas rectam ducere*
„ *interceptam, vt ab ijs præfinito poſſibili quocumque in-*
„ *ter ſegmento. Hoc autem conceſſo (eſt autem* αἴτημα
„ δισμήχανον *) famoſiora hactenus, quæ* ἄλογα *dicta fue-*
„ *re problemata* ἐντέχνως *ſoluit meſographicum.*

In hiſce Authoris verba duo manifeſta habentur; alterum ſcilicet (quod noſtro magis inſeruit inſtituto) quod poſtulati verba eadem ſunt, quæ problematis Apolloniani: alterum verò quod pro quocumque aliorum molimine ſubrogatum dixiſſet opus quaſi Geometricum, nec planè me præterit, vt nouum, & inopinatum omnibus ferè inuiſum futurum, & modo à non nullis adeò improbari, vt ex numero impoſſibilium

cenſen-

censentes, me malè consultum selegisse argumentum, ad Geometriam verè legitimam reuocare, quod ab omnibus hactenus destitutum, ne dixerim desperatum haberetur, attamen cum veritati magis obsequi teneamur, quàm in authoritatem aliorum committere causam nihil moueret me ab instituto, vt tandem exantlatis laboribus omne arduum in facillimum adduximus opus, omnino intra limites geometricos, numquam etenim in reatum illud incidere statueram, quod legimus apud Pappum in calce libri collectionum quarti hisce verbis.

„ *Videtur quodammodo peccatum non paruum esse apud*
„ *Geometras, quum problema planum, per conica, vel*
„ *linearia ab aliquo inuenitur, & vt summatim dicam cum*
„ *ex improprio soluitur genere. Hæc ille.*

Et quidem si ostenderimus, sectionem anguli plani ad peculiare suum spectasse genus, & non tantum tripartitò, sed inqualibet analogia geometricè secari viderint alij, an vniuersos inciderint in illud grauè delictum, qui ad suum non genus remiserant authores, speramus deinceps ignotam hactenus veritatem in complexum haberi, & expurgari quam plurima. Sit igitur.

PROBLEMA PRIMVM.

DVabus datis rectis lineis angulum quemcumque efficientibus, datoque extra puncto, & adhuc alia præfinita linea, hanc inter illas positione datas aptare, vt ad datum pertineat punctum.

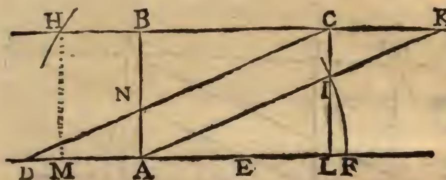
Illud

Illud ſcilicet, hoc eſt problema tam arduum, vt ab eo inquirendo uniuerſi arcerentur; fortaſſe cogitantes confuſum occultari intrà impoſſibilium chaos, ut ſpes, uel ſemita eruendi eluceſceret ulla, immò dubium admodum probabile eſt, an authori Pergæo effectio conſtitiſſet ipſa, nam inter artifices enumeratur, qui mechanica inuexerant in ſuffragium, Euthocio, & alijs atteſtantibus, quod autem in mentem uenerat, & inquirendi labores cum alijs minime repererimus, ardor planè perfectionis, tam pulchræ facultatis in cauſa fuerat, & quia ſufficiens nullum impedimentum ad aſſequendum ſe obtulerat, nec me fugit opus fuiſſe præcoces ſuſtinere cenſores, quos non moror dūmodo, nęuus huiuſmodi è geometria eluatur, nec perpetuò Mechanicorum indigeat, ut ſuas pulcherrimas, utcumque depromat effectiones, quæ omnia per nos ad ſuos remitti opifices uolumus, ſed ad rem.

Duæ lineę datæ poſſunt ad ſummū inclinationem uariare trifariam, ob ſpecies angulorum, primum igitur rectæ ſe se committant ad rectum *AB*, *BC*, & punctum extra ſit *D*, lineaue inſerenda ex præſcripto G. Agatur ex *D* ęquidiſtās *DF* ipſi *BC*, in qua ponatur *AF* ęqualis externę *G*, & ſecetur bifariam puncto *E*, ubi facto centro, ac interuallo *ED*, ſit peripheria circuli, uel occulta ſi placet, & ſignabitur punctum *H*, à quo ad *HF* diſtantiam ponatur in *DL* æqualis, & portio *AL* referatur in *BC*. Dico puncto *C* abſolui quæſitum, nimirum ducta *DC* pars eius *NC* relicta iter innclinatas *AB*, *BC* æqualis fieri AF, ſiuè G. (cum autem ex diſtan-

diſtantia *ED* non attingeretur *BC* ęquidiſtans *DA*, infra erit ſuum ſymptoma) ad demonſtradum deinde duo media aſſumimus; alterum quaſi ab effectu, & erit primum, alterũ porro à cauſa, vt à nemine effectio hęc pulcherrima infici poſſit. Ponatur ĩ directũ *BC* linea *CK* æqualis *DA*, iunctaque *Ak*, erit parallelográmum *AD Ck*, demiſſa *CL* ęquidiſtans *AB*, ſe ſecabit cum *Ak* in puncto *I*, poſtea centro in *A*, & diſtantia *AF* peripheriam tranſire accuratè per I ſumus oſtenſuri. Triangula namq; *ADN*, *CIK* ſimilia, & ęqualia euadunt, ex ęqualitate angulorum, quia *AND* ęquatur *NAI*, hoc eſt *AIL* alterni, & ad vertices *CI*K, & in parallelográmo, qui ad *D*, K opponuntur ęquales fiunt, reliqui *DAN*, K*CI* (hìc ſunt recti) at ad expletioné duorum rectorum fiunt pares, & *DA*, *CK* facta ſunt ęqualia, ergo & reliqua latera, homologè ſumpta ęqualia ſunt, quare duo *DN*, IK ſi auferri intelligantur, reliqua *NC*, *AI* paria erunt: quum verò oſtenderimus *A F* æqualem ipſi *A*I factum erit quod oportuit. A puncto igi-

cto igitur *A* dato, ad lineam *CL* positione datam, si agatur linea, quæ angulum faciat datum, erit linea positione. Sit itaque angulus construendus à linea exeunte à dato puncto *A*, æqualis angulo L*C D*, & linea erit *A*I, quę faciens angulũ *A*IL æqualẽ interno, erit æquidistãs *DC*, immo erit eadem

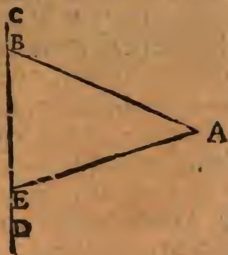


linea *AIK*, quæ secabitur cum *A*K in I eodem, sed aduersarius dicat cadere AI alibi quam in puncto illo sectionis I, ex proximo lemmate concludetur absurdum, quo circa angulus LAI non poterit augeri vel minui á magnitudine LAI, limitata per AI positione in angulo dato AIL, ergo arcus necessario erit per idem I punctũ, & semidiametri fient AF, AI; verum AI erat æqualis NC, ergo AF æquabitur NC, & pertinens ad D punctum, factum erit quod oportuit.

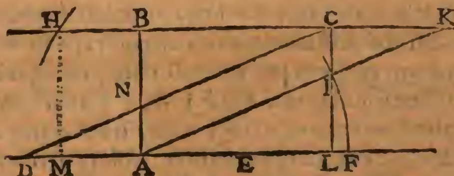
L E M M A.

EVclides ad xxx. Datorum sic arguit, si AB linea positione non dicatur, seruans quantitatem anguli G dati

G dati: excidat, & ſi fieri poteſt alibi cadat, ſit *AE*, ergo duo anguli *AED*, *ABE*, internus externo in triangulo *ABE* æquales erunt, cõtra 16 primi, quod eſſe nequit, & abſurdum hoc vbicumque extra ſitum *AB* probabitur; eſt ergo *AB* poſitione, & conſtat intentum.



At huius problematis vtique meretur præſtantia, vt alio & magis á cauſa comprobetur medio, facta idcircò vt ſupra cõſtructione, donec acquiratur *C* punctum, demittatur *CL* ſuper *AF* perpendicularis, ſecabitur *AF*



in *L* (minor eſt enim *BC* ipſa *AF*) Ideò per 7 libri 2 duo quadrata *AF*, *FL*, totius nempè, & alterius partis æquantur duplo, quod fit ſub *AF*, in *FL* rectangulo, vna cum quadrato *AL* reliquę partis, ſi ab vtraque ęqua-

litatis parte auferatur *FLQ* erunt æqualia

AFQ, & *ALQ*—*FLQ* † *AFL* 2

resoluto deinde *AF* quadrato per 4 secũdi, ęqualia erũt

ALQ † *FLQ* † *ALF* 2, & *ALQ*—*FLQ* † *AFL* 2

rursus ablata sub eadem specie æqualia, erunt

AFL 2 -- *FLQ* æqualia *ALF* 2 † *FLQ*

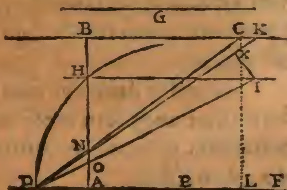
& vlterius resoluẽdo per 3 secundi, erũt *AFL* 2 — *FLQ*, *ALF* 2 † *FLQ* paria scilicet sub ijsdem notis *ALF* 2 † *FLQ*, harum partium altera ad speciem transeat quadrati, & sit potens linea *LI*, vtrinque accedat prius sublatum *ALQ*, si hoc componetur ad rectos angulos cum *LIQ*, vtique conflabitur *AI* quadratum, & simul *A LQ* † *LFQ* † *ALF* 2 erit *AFQ* prius resolutum, ergò æqualia esse *AI*, *AF* quadrata, & latera, vel saltem hisce initiatus negabit nemo, vndè manifestò sequitur vndequaque roborata conclusio.

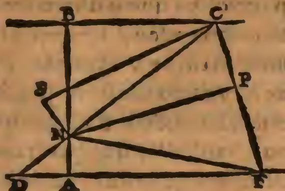
In schemate cadit *HM* linea, ne ociosa relinquatur, si quis curiosè postularet, vnica circini expansione dari *C* punctum, ex altero positione *D* dato, colligantur in vnum hæc simul spatia *EDQ* † *AEQ* † *MAF*, & hæc nihil aliud sunt quam *ADQ* † *ALQ* (si duceretur *AC* linea) & *DAL* 2 rectangulũ, scilicet resolutę partes in triangulo ambligonio *DAC* ex 12 secũdi, & habetur *HLQ* nempe DLQ, cui additum *HM* quadratũ, seu *CL*, omnia illa poterit *DC* linea, & dabitur eadem expansione vnica *C* punctũ.

At quia symptomata complectitur problema, & ratio illud construendi cuncta haud protulit, oportet illa per distinctos exhibere casus, vt generalis proponatur

tur

tur doctrina, & siquidem ex diuersa distantia parallelarum *DA,BC*, & magnitudine *G* externę contingere potest frequenter, quod à semidiametro *E D* non attingatur *BC*, vel quod vltra *AB* inter *BC* secetur; in horum vtroque casu constructio sic ordinanda erit. Ad idem interuallũ *ED*, vt cõtingit pars circuli scribatur *DH*, secabitur *AB* in *H*, per id punctũ agatur *HI* ipsis *DF*, *BC* ęquidistans, deinde inter *AH,HI* in angulo recto, ex *D* educatur *DOI*, ita vt intercepta *OI* æquetur datæ externę *G*: referatur postea HI in *BK*, et acta *DK* super eam ad angulos rectos cadat *IX*, & inter *DK*, *DX* media in ratione geometrica sit *DC*. Dico *C* puncto absolui quæsitum, scilicet intercepta *NC* ęqualis fieri datę externę *G*, seu *OI*, & ducta si placet *CL* vnã, vel alterã ex pręmissis methodum facilè repetendo ostendetur, & iteratò eadem premere vestigia ociosum, ac morosum censemus. Si verò alia compẽdiosiore vtamur idem concludetur, in proximo schemate ducta sit tantum *DC* seruatis distantijs in reliquo, agantur *NF,CF*, super hanc perpendicularis insistat *NP*, erunt duo quadrata



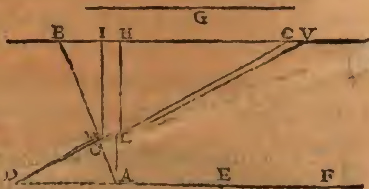


NP, *PC* ęqualia *NCQ*, ſicuti *NP*, *PF* æqualia *NFQ*. ſeu duobus *AF*, *AN* quadratis; exceſſus itaque duorum quadratorum *AF*, *AN* ſupra quadratis *NP*, *PC* ponatur ad rectos angulos ſuper *NC*, erunt *NC*, & *NS* (exceſſus ille) ęqualia quadratis *FA*, *AN*, nempè *NF* quadrato, ęquabitur quadrato *CL*, quare & *NS* ipſi *AN*, vndè *AF* ipſi *NC*.

Secundus deinceps caſus erit quum lineæ *AB*, *BC* fuerint ad angulum recto maiorem inclinatę, reliqua ponantur, vt ſupra: vt conſtruatur problema; erigatur *AH* ad angulos pares, & inter *AH*, *HC* ex *D* puncto intercipiatur LV ęqualis externę, ſiue *AF*, ſecabitur inclinata *AB* puncto *O*, á quo ſi duceretur parallela ipſi *LH* (in ſchemate non adeſt) accipienda erit media proportionalis inter illam ex *O* ducenda, & *LH* ęquidiſtantibus, & hęc ex *N* puncto ſimiliter perpendicularis facta ſuper *HV*, erit *NI* deindè differentia quadratorum *HL*, *NI*, aucto quadrato *HV*, fiet quadratum ex *IC*. Dico punctum *C* eſſe quod quæritur, duo namque quadrata *HL*, *HV* æqualia fuerant quadrato *LV*, & exceſſus *HL* quadrati ſupra quadratum *NI* additus quadrato *HV*, vt conſtituatur *IC* quadratum, ergo duo quadrata *NI*, *IC* ſunt æqualia duobus *LH*, *HV*, quare & LV æquabitur quadrato

drato *NC*, & linea pertinet ad *D* punctum datum, quo circa conſtat intentum.

Tertius denique caſus erit quum datę *AB*, *BC* lineę conficiunt angulum recto minorem, manentibus vt ſupra reliquis: vt problema conſtruatur, agatur *AH* perpendicularis inter parallelas, & à puncto *D* inclinetur per primam formam ſub angulo *AHV* recto, linea *DV* relinquēs ſui partem LV interceptam, vt in alijs ſupra, ſecabitur inclinata *AB* in puncto *O*, à quo ſi caderet æquidiſtans ipſi HL, intervallam, & HL eſſet inuenienda media *NI* proportionalis pariter incidens ad angulos rectos, quantum itaque differunt quadratum *NI*, & quadratum ex linea ducendi ex *O*, tantum imminuatur de quadrato HV, vt reſiduum ſit *IC* quadratum, ergo duo quadrata *NI*, *IC* hoc eſt quadratum *NC* æquabitur quadrato LV, ideſt duobus LH, HV, ſed *CN* pertinet ad punctum *D* datum, ergo in omnibus caſibus problema abſolutū perſpicuè apparet.



ADNOTATIO PRIMA.

ET ſi in primo caſu contingeret, quo nempè *AB*, *BC* ſe ſe committunt ad rectum angulum, quod diſtantia parallelarum *AB*, *BC* adęquaret diſtantiā *DA*

puncti

puncti scilicet *D* à perpendiculari *AB*, vtique eo casu esset inclinanda *DC* quasi ab angulo quadrati in oppositum latus, & problema hoc habetur ex antiquis apud Pappum propositione 72 libri 7 collectionum Heraclito adscriptum; si verò manente vt supra æqualitate distantiarum AB, BC continerent angulum vagum, tunc ex *D* ducenda foret quasi ab angulo rhombi, & hoc quidem problema Ghetaldus construxerat propositione 3 primi libelli de inclinationibus agens, verum quęsito generali generalis opponenda erat doctrina.

ADNOTATIO SECVNDA.

ITaque omni ex parte problema absolutum, per propria sui generis, planorum, implicat quidem, industria quacumque ab eo amoueri posse; diuersum planè est, si altera analyseos methodo, indicent peritiores, aliquatenus sectionum conicarum concursu præfiniri alltera mediarum inter extremas; effectio igitur ea, et cuncta quæ aliorum constructa habentur molimina in suo consistant ordine, nihil geometriæ puriori officit; torqueant se se vel minimum inhiberi queunt, ne dum naturalis effectionis efficacia eneruari, quin suas liberè exerat vires.

ADNOTATIO TERTIA.

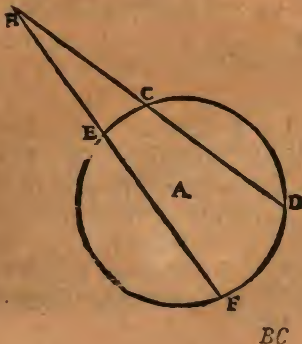
IN proximo secundo problemate, inter cętera ordinauimus methodo alia interponere pręfinitam inter

ter inclinatas ad angulum recto minorem, in quo præclarè laborasset Vieta, nisi opus inniteretur suo prīcipio, nos verò exhibituri geometricè constructionem, ne aliundè inquirenda sint, quæ huc pertinent, pauca hęc ab eiusdem authoris supplemento desumpsimus geometrico, lubet hic afferre.

PROPOSITIO TERTIA *EX SVPPLEMENTO.*

Si duæ rectæ lineę à puncto extra circulum eductæ ipsum secent, pars autem exterior primę sit proportionalis inter partem exteriorem secundę, & partem interiorem eiusdem, erit quoque pars exterior secundę proportionalis inter partē exteriorem primæ, & partem interiorem eiusdem.

SVb A centro descriptum circulum eductæ ipsū secent à pūcto eodē B duę lineę, vna quidē in pūctis *E*, *F*, altera vero in *C*, *D*, vnde partes exteriores secantiū sint *BC*, *BE*, interiores autem *DC*, FE, sitq; *BE* inter *BC*, *DC* media proportionalis. Dico et



BC

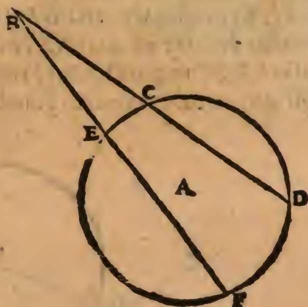
BC mediam fore proportionalem inter *FE,BE*, quoniam enim ab eodem puncto extra *B* circulum ſecant duę *BCD*, *BEF*, Ideo eſt vt *BE* ad *BC*, ita *BD* ad *BF*, ex hypotheſi autem eſt *CD* ad *BE*, vt *BE* ad *BC*, quare *CD* eſt ad *BE*, ſicut *BD* ad *BF*, & per ſubductionem eſt *CD* ad *BE*, vt *BC* ad *EF*, & conſequentèr vt *CD* ad *BE*, ita *BE* ad *BC*, itaque *BC* proportionalis eſt media inter *BE*, & *BF*, quod erat oſtendendum.

EIVSDEM AVTHORIS PROPOSITIO QVARTA *SVPPLEMENTI.*

Si duæ rectæ lineæ à puncto extra circulum ductę ipſum ſecent, quod autem fit ſub partibus exterioribus eductarum æquale ſit ei, quod fit ſub interioribus; exteriores partes permutatim ſumptę continuè ſunt proportionales inter partes interiores.

SVb A centro circulum deſcriptum ſecent duę lineę rectę ab eodem B puncto eductæ, vna quidem in punctis C, D, altera verò in punctis E, F, vndè partes exteriores ſecantium ſint BC, BE; interiores CD, EF, et quod fit ſub BC, BE exterioribus, ſit ei æquale rectangulo, quod fit ſub DC, EF interioribus. Dico inter DC, et FE eſſe proportionales continue BC, BE, eas aſſumendo permutatim, vt videlicet partem interiorem primæ ſecantis ſequatur exterior pars ſecantis ſecundæ, vel interiorem ſecundæ pars exterior primæ, nempè eſſe, vt DC ad BE, ita BE ad BC, & ita BC ad EF quo-

quoniam enim id quod fit ſub *CD*, *EF* æquale eſt ei, quod fit ſub *BC*, BE, Ideò eſt vt CD ad BE, ita *BC* ad EF, & per syneresim, vt CD ad BE, ita BD ad BF; ſed ex ratione cōſtructionis eſt BE ad BC, ſicut BD ad BF, ergo eſt vt CD ad BE, ita BE ad BD, & conſequentur BC ad EF quod erat demonſtrandum.



PROPOSITIO QVINTA

EIVSDEM SVPPLEMENTI.

Datis duabus lineis rectis, inuenire inter eaſdem duas proportionales medias continuè

SInt datę Z maior, X minor; centro A, ſpatio autem per ſemiſſem Z circulus ſcribatur, in quo linea aptetur BC æqualis minori X, & protrahatur in D, facta nempè BD dupla ipſius BC: Iungatur DA, cui æquidiſtans fiat ex puncto *B* indefinitè linea *BE*, deindè à puncto *A* inclinetur linea *AH* ea ratione, vt pars eius

comprehensa datis *BF*, *BE* æqualis fiat expositę *AB*, quę protracta ex vtraque parte secabitur circulus punctis *I*, K: producatur etiam *DB* indefinitè in *F*, & ab *A* puncto ducatur ad duas *BE*, *BF* recta *KAIGH*, secans ipsas *BE*,*BF* in punctis *G*,*H*, itaut *GH* linea sit æqualis ipsi *AB*, circulum verò in punctis *I*, *K*, quorum proximius ipsi *H* sit *I*. Dico continuè proportionales esse *IK*, *BH*, *HI*, *BC*. Quoniam enim constructæ sunt parallelæ *DA*,*BG*, ideò est vt *HG* ad *HB*, ita *GA* ad *BD*; est autem *HG* ad *I*K, sicut *BC*, ad *BD*, simplum videlicet ad duplũ, quare est vt *IK* ad *HB*, ita *GA* ad *BC*. Ipsi autem *GA* addatur *GH*, auferatur autẽ *AI*. Quoniam igitur *GH*,*AI*, sunt æquales, erunt quoque *HI*, *GA* ęquales; ergo est vt *I*K ad *HB*, ita *HI* ad *BC*. Ab *H* igitur pũcto extra circulũ sumpto eductę sunt duę rectę ipsum secantes, & quod fit sub exterioribus earundem partibus, videlicet HB,HI

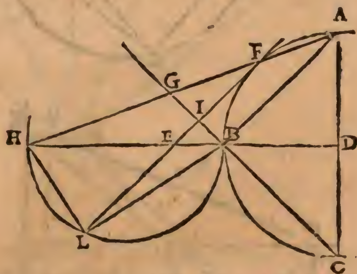
ęquale

ęquale eſt ei quod fit ſub interioribus, videlicet *IK*, *BC*. Quare partes exteriores ſunt permutatim ſumptę continuè proportionales, nempè *IK*, *BH*, *HI*, *BC*. Datis igitur duabus lineis rectis Z, *X* id eſt IK, *BC* inuętę ſunt medię continuè proportionales *HB*, *HI*, quod erat faciendum.

PROBLEMA SECVNDVM.

Inter duas lineas ad angulum recto minorem inclinatas pręfinitam ponere, quę ad datum pertineat punctum.

SInt BG, BH rectę ad angulum HBG inclinatę recto minorem, linea pręfinita AB, cui ęqualis inter illas oporteat inſerere, vt ad A punctum pertineat datum: producantur BG, BH indefinitè, & ſuper hanc cadat AC perpendicularis, fiet ABC triangulum iſoſcele, cui circũ eat portio circuli, & in primo caſu pro angulo recto erit ſemicirculus, in ſecundo eo maior in angulo acuto, & in tertio



pro obtuſo minor; quare *B* punctum in medio portionum, & triãgula *ABC* iſoſcelia. Deindè ponatur *DE* ipſi *AB* æqualis, & ex puncto *E* ordinetur tangens *FE*, in

qua porrecta ſignetur IL (à puncto videlicet quo ſecatur *GB*) ęqualis *AB*, huc vſque pro omnibus eſt vna conſtructio; porrò in primo caſu iunctæ *BL* ponatur ad rectos angulos *LH*, ſecabitur reliqua *BH* in puncto *H*, ad quod ſi iungatur *AH* eius intercepta *GH* pars dico æqualis fieri ipſi *AB*.

In angulo deindè acuto *ABC*, vt in ſecunda figura agatur *AL*, tunc ſecabitur *HB* in *O*, & ſuper *L* puncto

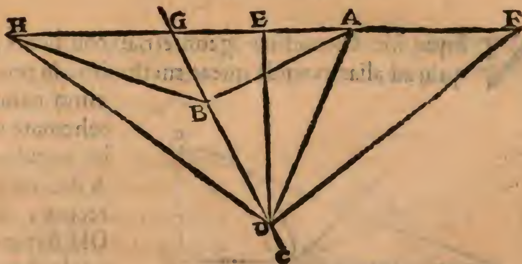
eleuetur perpendicularis *LH* erit idē punctum *H* efficiens quæſitum, vt *GH* pariter æquetur *AB*, ſeu *BC*.

Deniq; in angulo obtuſo in tertia figura, agatur ex K diameter parallela

AC

AC, & iungatur kL, ſecabitur *HB* in *O*, & ſuper *L* puncto erecta *LH*, erit *AH* illa eadem efficiens queſitum, & harum effectionum vna ſimul erit demonſtratio.

Repetatur ſchema primum cum lineis oportunis, & in *B* puncto quadrantis eſt *AB* inter *HB*, *GB* interponenda; conſtruatur ad *A* angulus *DAG* æqualis *DGA*, latera in iſoſcele *DA*, *DG* æqualia euadunt, & ſi demittatur perpendicularis *DE* diuiditur baſis in *E* bifarian, ſeu ſi angulus verticis biſecetur *ADG* perpendicularis fiet *DE*, quod ad 26 primi oſtendit in commentatijs Clauius, ſi verò in producta *HA* ponatur *AF* æqualis



AB, & iungantur ad *D* lineæ *DH*, *DF*, & tota *FH* ſecetur bifariam, oſtendetur eſſe in *E* puncto; quare in triangulis *DEF*, *DEH* duo latera *DE*, *EF* æqualia euadunt ipſis *DE*, *EH* cum angulo recto ad *H*, à quibus ſi auferantur æquales anguli *ADE*, *GDE* erunt reliqui

ADF

ADF, *GDH* anguli æquales, ſed erant æquales *DAF*, *DGH*, vt potè reſidui vterque ad duos rectos, ſublatis iam æqualibus in Iſoſcele DAG illis deinceps, ergo æquiangula ſunt triangula DAF, DGH, & ex 32 primi anguli DFA, DHG æquales, vndè & DF, DH latera eſſe paria oportet, ſed præter angulos latus vnius trianguli ADF, nempè AD æquatur DG lateri alterius trianguli GDH, quare & ſimilia, & æqualia erunt illa triangula, ideò homologa AF, HG latera erunt æqualia, ſed fuerat AF poſita ipſi AB æqualis, ergo & GH eidem æquabitur, quod erat imperatum fieri.

ADNOTATIO.

NEque hìc fœcunditas geometriæ cohibetur, quin ad alias extendi queat methodos, in proximo enim schemate vbi angulus ABC eſſet rectus, ſi DH fiat æqualis duobus BC, erit ducta AH reliquẽs interceptam *GH* ęqualẽ *BC*.

In

In ſecunda verò figura, quò eſſet angulus *ABC* acutus,

poſita K*E* æqualis *BC*, & *EH* ęqualis *AE*, erit vt ſuprà *HG*, ęqualis *BC*. Demũ in tertia figura, in qua eſſet *ABC* obtuſus angulus, ponatur K*E* æqualis *BC*, & ducta *DE* ſecabitur *CG* in *I*; ponatur *CI* in *BH*, habebitur iterum *H* efficiens *HG* æqualẽ *BC*, ſeu A*B*, quæ duci non oportuit in triangulis *ABC* æquicruribus, & hæc cadere ſub demonſtratione præmiſſa liquet omnimodè, & ſi aliter ordina-

nari

ri liceret, quod fortaſſe alibi dicetur, etenim pro ſecunda hac propoſitione ſuperaddi non nulla coacti fuimus. Interim quum pluſquam bis edocti methodum interponendi præfinitam inter inclinatas, lubeat vnum rectificare ex veteribus opus, & ſit pro Conchoide Nicomedis à iunioribus vſurpatum frequentius, vt tandem cum omnium reliquis explodantur ſi probauerint oportunè ſibi facultas prouideri cuncta. Sit itaque.

PROBLEMA TERTIVM.

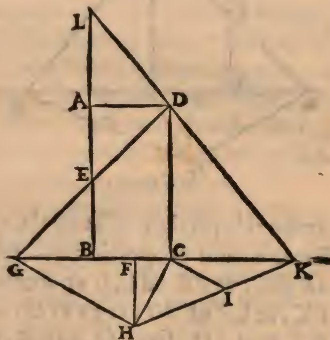
Datis duabus rectis lineis, totidem medias inter eas collocare lineas in analogia continua.

SInt igitur extremę datæ lineę *AB*, *BC* ad inueniendum medias expoſitæ in analogia continua. Inclinentur ad angulum rectum, & compleatur parallelogrammum *ABCD*, cuius duo latera *AB*, *BC* biſecentur punctis *EF*, & agatur *DE*, quę productę *BC* occurret in *G* puncto, deinde perpendicularis ex *F* excitetur indefinitè, & adplicetur *CH* ęqualis *AE* ſemiſſi nimirum *AB*, porrò iungatur GH, cui fiat *CI* ęquidiſtans ſimiliter indefinitè (vſque adhuc antiquorum conſtructio optime intra fines geometricos ſe continuerat, at deinceps quum inter inclinatas KC, *IC* ad angulum recto minorem ex puncto extra dato *F* nequirent lineam pręfinitam interponere, & ad opus ſe ſe conuerterant alienum) at ex deductis ſuperius iam

con-

conſtat id legitimè poſſe fieri ex Euclidea doctrina, igitur ex altera ex premiſſis methodo à puncto *H* ponatur *I*K ęqualis *AE*, ſiue *HC*. Dico inter *AB*, *BC* extremas inuētas eſſe totidem medias in analogia cōtinua, & erunt *C*K maiori proxima, & *LA* reliqua, hiſcè planè reſtitutis ipſo demonſtrationis proceſſu nihil immutabitur, attamen ad rei complementum ſubnectere operæ prętium erit.

Quoniam *BC* ſecta eſt ęqualiter in *F*, & eidem in directum adiecta eſt *C*K, rectangulum *B*K*C* vna cū quadrato *FC*, æquale eſt quadrato *FK*, communi ſi apponatur *FH*, erit *B*K*C* rectangulum vna cum duobus quadratis *FC*, *FH*, hoc eſt quadrato vnico *HC*, æquale quadrato *HK*, ſiue duobus quadratis *FH*, *FK*: at quoniam vt



LA ad *AB*, ita eſt *LD* ad *D*K, ſiue *BC* ad *Ck*, & eſt *AE* ipſius *AB* ſemiſſis, & *GC* eſt dupla *BC* (etenim ex ſimilitudine triangulorum *DAE*, *GEB*, & laterum *BC*, & *AD*, ſeu *AE*, & *EB* æqualitatem habemus), ergo vt *LA* ad *AE*, ita *GC* ad *C*K, ſed vt *GC*, ad *C*k ita *HI* ad

 Ik, ob

IK, ob æquidistantes *GH*, *CI*; ergo componendo erit, ita *LE* ad *AE* vt HK ad *I*K: æqualis autem *AE* ipsi IK posita fuit, quia æqualis erat *HC*, igitur consequenter *LE* æqualis fiet *H*K, eorumque quadrata æqualia; sed quadrato *LE* æquale rectangulum est *BLA*, vna cum qnadrato *A E*, & quadrato *Hk* est æquale ostensum rectangulum *B*K*C*, vna cũ quadrato *HC*, quod fuerat ęquale quadrato *AE*: igitur duo hæc quadrata *AE*, *HC* æqualia sublata, erunt reliqua duo rectangula *BLA*, *BKC* æqualia, & latera eorum proportionalia reciprocè, hoc est, ita *BL* ad *B*K, vt *CK* ad L*A*: vt autem *BL* ad *B*K, ita *DC* ad *C*K, & L*A* ad *AD*; ergo vt *DC* ad *C*K, ita CK ad LA, & LA ad AD, siue *AB* ad CK, ita CK ad LA, & LA ad AD, siue BC. Sunt igitur in analogia continua AB, CK, LA, BC, quod erat ostendendum.

ADNO-

ADNOTATIO.

EX defectu itaque inuentionis duarum inter extremas totidem mediarũ accuratè, cõquerebatur ſolertiſſimus olim Anderſonus in Zetetico ad Ghetaldum reſponſo, vt obinuenti potioris inopiam, cogerentur authores ad mechanicum prouocare, idcirco oportunitas hic ſeſe offert eadem Geometriæ reſtituendi, vt porrò nulla pro eiuſmodi audiatur querela, ſic igitur aiebat author.

Illas verò æquetiones in quibus magnitudo omninò data æquatur homogeneæ prorſus ignotæ, ſiue puras, ſiue adfectas, vt & prius, ita & nunc (niſi conceſſis quibusdam, quæ Geometria hactenus negauit) ad mechanicem geometriam ἐπιστημονικῶς reducere, ingenue neſcire me profiteor, quę autem poſtulentur, vt in eiuſmodi æquationibus quæſitum ſciatur, ex analytica hac noſtra methodo ſic clarum fiet.

Ponatur A cubus æqualis ſolido facto ex B Q in D. ſi inter B & D duæ inueniantur proportionales cõtinuè, ſecunda *B* eſſe ipſam *A*, de qua quæritur, nemo eſt, modo hanc artem, vel à limine ſalutarit, qui neſciat.

Sit autem *A* cubus + *B* in *AQ* = æqualis ſolido dato, quod ſi cubus non eſt, ad eam reuocetur ſpeciem, ſitque *D* cubus, ſtatim apparet huius æquationis mechanicem pendere ab hoc problemate.

„ *Ex ſerie quatuor proportionalium continuè data ſecun-*
„ *da, & recta æquali differentiæ inter primam minorem,*

,, *& quartam inuenire proportionales.*

Eritque harũ prima ipſa *A* de qua quęritur, *D* ſecũda illi proxima, & *B* differentia inter primam, et quartã;

At *A* cubus -- *B* in *A* quadratum ⩵ æquetur *D* cubo, proponatur

,, *Ex ſerie quatuor continuè proportionalium, data ſecun-*
,, *da, & differentia inter primam minorem, & quartam,*
,, *inuenire proportionales.*

Eritque *A* prima maior, *B* differentia inter quartam minorem, & primam maiorem, & *D* ſecunda.

Tertio *B* in *AQ* -- *A* cubo ⩵ æquetur *D* cubo, proponetur.

,, *Ex ſerie quatuor conitnuè proportionalium data ſecunda*
,, *& adgregato primæ, & quartæ inuenire proportionales.*

Eritque harum prima *A* maior, minoruè ſecunda *D*, adgregatum primæ, & quartæ *B*, quæ ipſorum ſolidorum ſtructuram conſideranti clara ſunt.

Quarto, *A* cubus ✠ *BQ* in *A*, æquetur *D* cubo. Ex hac æquatione ſtatim quidem offeruntur è quatuor continuè proportionalibus, ſecunda *D*, tum *B* media proportionalis inter primam, & differentiam primæ, & quartę, ſiue rectangulum ex prima in differentiam primæ, & quartæ, at ex facto paraboliſmo, coefficienti dato, nimirum ipſi *B* quadrato reliquis adplicatis ſolidis, id eſt ſi fiat.

Vt *BQ* ad *DQ*, ita *D* ad *C*, erit *C* æqualis ipſi *A*, & prætetea altitudini ortæ ex adplicatiane ipſius *A* cubi ad *B* quadratum, ſi igitur data *C* ita diuidetur, vt cubus vnius ſegmenti æqualis fiat ſolido, quod fit ſub

altero,

altero, & dato *B* quadrato, erit latus cubi magnitudo quęſita, hoc autem eſt.

„ *Ex ſerie quatuor proportionalium data prima, & adgre-*
„ *gato ſecundæ, & quartæ, inuenire proportionales.*

Eritque harum *B* prima, *C* adgregatum ſecundę, & quartæ, *A* vero ſecunda.

Quinto ſi *A* cubus -- *BQ* in *A* ═ ęqualis *D* cubo, & hic offertur ſecunda data *D*, cum *B* media proportionali inter primam, & differentiam primę, & quartę.

At verò ſi *D* cubus ipſi *B* quadrato adplicetur; hoc eſt ſi fiat, vt *BQ* ad *DQ*, ita *D* ad *C*, & eidem adplicari intelligatur, & *A* cubus, erit *C* ęqualis parabolę ortę ex adplicatione ipſius *A* cubi ad *B* quadratum, minus ipſa *A* longitudine, quare

„ *Ex ſerie quatuor proportionalium data prima minore, &*
„ *differentia ſecndæ & quartæ, inuenire proportionales.*

Eritque data B prima minor, C differentia ſecundæ & quartæ maioris, & A ſecunda quęſita.

Denique BQ in A, minus A cubo, ęquetur D cubo. hìc etiam ſtatim offeruntur ſecunda D, tum B media proportionalis inter primam A, & adgregatum primę, & quartę. Adplicetur autem *D* cubus ipſi *B* quadrato, quodque inde oritur ſit *C*, & eidem intelligatur adplicari, & *A* cubus, erit altitudo *C* ęqualis ipſi A, minus altitudine, quę oritur ſi adplicetur, & A cubus eidem *B* quadrato, vnde quęritur,

„ *Ex ſerie quatuor continnè proportionalium, data prima*
„ *maiore, & differentia inter ſecundam, & quartam,*
„ *inuenire proportionales.*

Erit-

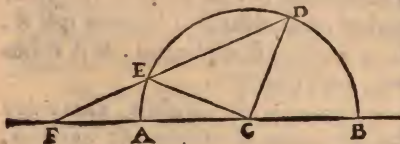
Eritque data B prima maior, C differentia ſecundæ maioris, & quartæ, & A, ſecunda de qua quæritur.

Atq; hactenus peculiaris mihi methodus in ęquationibus cubicis puris, siue vt libet adfectis, in quibus cùm exactio geometrica nondum ſit exhibita, aut inuẽta, quid in veteres illos Platonem, Eratoſtenem, Nicomedẽ, Archimedẽ, Heronem, Pappum, aliosue in similibus ad hoc negociũ ἐπιχειρήμασι imitari interim liceat?

Hactenus Anderſonus, cuius propositę effectiones ex ipſo Geometrię penu erutę, modo liberum vnicuique fiet ex ſupra inductis reſtituere, & quidem vt fuerat ex ſelectis, qui & Vieteàm hauſere doctrinam, ſcitè admodum enunciauit tunc temporis, ad eadem exhibendum, inuentam minimè fuiſſe exactionem, non idcircò quod inpoſterum exhiberi non potuerit, vt audacter plane nimis ſcripſerant alij.

LEMMA.

QVia ad triſectionem anguli properamus, insiſtẽtes interim in repurganda forma ad ipſo Vieta aſſumpta locus poſtulat vt reportetur 9 ipsius ſupplementi propositio, quæ sic ſe habet. Si à dato inperipheria puncto



puncto agatur linea occurrens diametro eductę tali ratione, vt intercepta conuexo peripherię, & porrecta diametri, ęquetur semediametro circuli, tunc angulus in centro, siuè opposita peripheria secabitur trifariam. Sit in semicirculo punctum D datum, à quo acta DF occurrat diametro eductę inpuncto F, adeo vt FE ęqualis sit sdmidiametro AC, tunc BD arcus fiet triplus oppositi arcus AE, siuè angulus in centro BCD triplus fiet anguli ACE, & hoc ex vi Isoscelium DCE. ECF ęqualium laterum manifeste constat, & vt demonstratio legitima est, ita constructio defectum ostēdit, & quidem non facultati, sed cultoribus referendum, & nos inferius ostensuri ex principijs ipsius Geometrię integram constructionē, hinc habeatur vbi trisectus fuerit angulus adplicatam lineam EF ęqualem fieri semidiametro, & è contra, si adplicata ęquetur semidiametro, angulus incentro trisecari &c.

PROBLEMA QVARTVM.

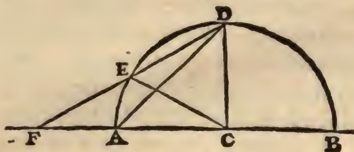
Data circuli peripheria, & in ea puncto, dataque linea præfinita, illam inter conuexum, & eductam cordam inclinare, vt ad punctum pertineat datum.

PLura quippè complectitur problema, quám effectione vna per frui queat, de semicirculo etenim, & alijs supra, et infra eo portionibus oportet intelligi, et pro qualitate lineę quæ pręstet, cedat, siue adęquet semidiametro, vel semicordæ, pariter adhuc pro

situ

ſitu puncti in ipſa peripheria dati , quare per diuerſa erit abſoluendum problema.

Sit primum data peripheria ſemiciculus ADB, pũctum verò in vertice quadrantis D , & linea pręfinita æqualis ſemidiametro ; Demittatur DC , quæ in hoc caſu in centro erit, & normalis ſuper diametrum, iunctaque AD, hæc ſumatur vt media in ſerie trium proportionalium, quarum differentia extremarum ſit ſemidiameter AC, & reperiantur extremę, quarum maior ex D puncto ponatur in occurſum eductę diametri, & ſit DF, quę peripheriam ſecabit in E puncto. Dico eius intercepta



pars FE æqualis fieri ſemidiametro AC. Quoniam igitur in triãgulo AFD ambligonio, latus maius DF poteſt quadrata AF, AD, & inſuper quod fit ſub FA in AC bis, ſiue vnico quod continetur rectangulo ſub FA in AB : at idem quadratum DF reſoluitur etiam in duo rectangula DFE, EDF, Ideo harum partium facta comparatione erunt ADQ ✠ FAB ✠ FAQ ęqualia EDF, DFE : at rectangulum FAB vna cum quadrato AF, æquale eſt AFB. rectangulo, id eſt æquale facto ſub EFD, nam ex puncto F extra ductæ ſunt in circulo duæ FD, & FB, igitur ſublata, quæ ęqualia ſunt euidenter, relinquetur DAQ ęquale EDF rectangulo, & ſi ad analogiam

logiam reuocetur ęqualitas, tres erunt proportionales *FD*, *DA*, *DE*, & harum differentia extremarum fiet *EF*, at in earumdem constructione assumpta fuerat *AC* pro differentia extremarum, quare ęquales esse *AC*, & *EF* sit euidens, & pertinet ad punctum *D* datum, quare factum erit quod oportuit.

ADNOTATIO PRIMA.

LEmma suppositum ex datis media, & extremarũ differentia ad exhibendum extremas in serie triũ proportionalium, quod á diuersis habetur, & admodum facilè sit, supersedemus repetere hìc, cęterum methodo eadem vsuri in alijs casibus, scilicet in portionibus supra, vel infra semicirculum, nihilominus pro semi circulo constructio singularis & expeditissima adest, scilicet si á puncto verticis *D* adplicetur diameter in occursum eductę, quę intercipietur erit semidiametro ęqualis, hoc est diameter secabitur à peripheria circuli bifariam, quoniam *DF* potest quatuor semidiametri quadrata *AC* seù *CD*, & hoc sublato, reliqua *FC* tria poterit eiusdem quadrata, at *FCQ*, ęquale est rectangulo *AFB*, vna cum quadrato *AC*, & subducto, poterit *AFB* rectangulum, eiusdem *AC* quadrata duo, hoc est rectangulum *EFD* duo poterit quadrata eiusdem *AC*, cum ęquetur *AFB*. Ideò secabitur in *E* bifariam, maximum enim spatium, quod à partibus sectę fit, est ex puncto semissium, quare constat propositum.

ADNOTATIO SECVNDA.

CVm autem adplicanda inter conuexum, et eductam diametrum diuersa à ſemidiametro fuerit, túc pro opportunitate lineę datę emendanda erit media, vt cum differentia extremarum, (quę sẽper erit linea data) habeantur extremę: ponatur primum quod data ſit ſemidiametro maior, et ſit ipſa CG, iuncta AD, eidem inſiſtat ad angulos rectos HA, quę media ſit inter ſemiſſem ſemidiametri, et differentiam ſemiſſium datę CG, et ſemidiametri ſemiſſis, ſitque LO ęqualis AH, nempè quę media eſt inter CO ſemiſſem ſemidiametri, et huius differentiá á ſemiſſe datę *CI*, ſcilicet *OI*; ſi deinde iungatur *DH*, hęc temperata media erit, vt cum differentia extremarum *CG*, ipsę inueniantur extremę, quarum maior inclinata ex *D* ſecabitur á peripheria in *E* puncto, vt *EF* poſtea ęquetur *CG* datę, nam quadratum medię in ſerie trium proportionalium excedit quadratum minoris in eo rectangulo, quod fit à minore in differentiam extremarum, et quod illud quadratum poteſt, cum quadrato differentię extremarum,

rum, eiusue latus medium sit inter maiorem & extremarum differentiam scilicet, *DHQ* excedit *DEQ* in eo quod potest rectãgulum *FED* sub differentia extremarum, & minorem, illudque adpositum quadrato *FE* differentiæ extremarum, est rectangulum *DFE*, & sunt iterum trium proportionalium *FD*, *FE* extremæ, quarum media sit quod illud *DFE* potest rectangulum, quod est relictum è quadrato maioris *DF*; si auferatur rectangulum sub eadem maiore *FD*, & minore, *DE*, idest quadrato mediæ assumptæ *DH*, & differentia *CG* in constructione assumpta sit eadem cum *FE* vt constat

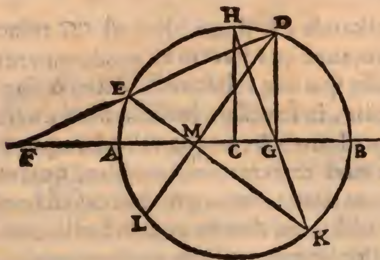
Si verò adplicanda *FE* detur, hoc est *CG* minor ipsa semidiametro, tunc quadratum eo modo inuentũ, vt *AH*, quod possit spatium sub semisse datæ, & semidiametri differentia, in semissem semidiametri, auferendum erit è quadrato *AD*; vt quę reliquum poterit statuatur media inter extremas inueniendas, quarum est differentia linea data: nequè pro hoc casu schema nouum opus est adducere, cum ex eodem facilè concipi possit, & maior linearum trium proportionalium ex *D* adplicata in diametrum educta, relinquet *EF* semidiametro minorem, & factum erit quod imperatum fuit,

Notandum hic tandem sola ea, quæ fuerit semidiametro æquali trisecari arcum, vel angulum: at in ampliorem geometriæ extensionem ad alios transferimus casus.

PROBLEMA QVINTVM.

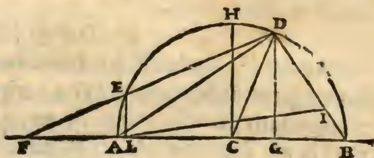
Dato ſemicirculo, & puncto in eius peripheria vltra verticem, lineaque ſemidiametro æquali, illam inter conuexum, & eductam diametrum ponere, vt ad datum pertineat punctum.

SIT circulus, & in eius peripheria punctum datum *D* vltra verticem quadrantis *H*, à quo ſit inclinanda linea, adeò vt cōcluſa eius pars inter conuexū peripheriæ, & diametrum eductā, æqualis ſit ſemidiametro expoſiti circuli. Demittantur in diametrum *AB* normales



HC, DG, deindè ſecetur bifariam AG in M, per quod punctum agatur DML, & ex H per G alia HGK, & per idem punctum K aptetur in circulo KE ſumpta æqualis DL, ſeù ex L, diſtantia verò ſemidiametri ſignetur punctum E, vtroque etenim modo haberi licebit. Dico illud E efficere quæſitum, ſcilicet ducta DEF, eius concluſa EF portio inter peripheriæ conuexum, &

um, & eductam diametrum æqualis fieri ipsi semidiametro, quod vt sine confusione linearum ostendi queat, in circulo altero prorsus æquali eadem signentur puncta D,H,E, lineaque DF, & perpendiculares HG, DG, iungantur postea AD. & DB; et super BD ponatur AI ea lege, vt DI sit potens FA in GC bis, supponimus ex opere iam AF terminari ipso F puncto, deinceps verò AI assumatur, vt media in serie trium proportionalium, & cum extremarum differentia, nẽpe ipsa semidiametro AC inueniantur extremæ, quæ quidem in progressu ostendemus coæquari ipsis DF, DE, vt methodo vtẽtes resolutiua. In ãblígonio triangulo ADF, latus DE maius potest duo FA, AD quadrata, plus eo quod bis fit rectangulo sub FAG, & idem DF quadratum resoluitur in duo rectangula EFD, EDF, & connexa CD quadratum similiter AD æquatur duobus AC, CD quadratis, plus eo quod sub ACG bis comprehenditur rectangulo, quare æqualitas consistet inter



EFD) & FAQ + FAG 2
+ EDF) + ACQ + ACG 2
+ DCQ

Sed

Sed quadratum *FA*, plus rectangulo *FA* in *AB*, æquale est rectangulo *AFB*, seu *EFD*. Itaque si à rectágulo *FA* in *AG* 2 auferatur *FAB*, reliquum erit, quod fit sub *FA* in *CG* 2, cui si accedat, factum sub *CA* in *CG* 2, efficietur *FC* in *CG* 2, Ideò auferendo æqualia æqualibus, & reliqua collecta, ęqualitas iterum consistet inter

$$EDF, \ \& \ ACQ + CDQ + FC \text{ in } CG2$$

At *ADQ* æquale est quadratis duobus *AC*, & *DC*, plus eo quod fit sub *AC* in *CG* 2: ergo *EDF* spatium rectangulum excedit *ADQ* in eo, quod fit sub *FA* in *CG* 2, & est *EDF* æquale *AIQ*, cuius latus *AI* in constructione trium proportionalium, vt media assumpta fuerat, & pro differentia extremarum, *AC* semidiameter, quæ ęqualis fit *EF*, cum eædem *DF*, *AI*, *FE* redeant in analogia, quare constat propositum.

ADNOTATIO PRIMA.

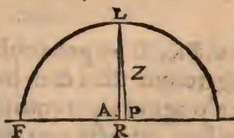
Assumpsimus in constructione *FA* terminatam, vtpotè habetur per adplicatam duplicem in circulo *KE*, aut *LE*, & si libeat dissimulare, illud tamen alia via assequetur, & ipsam *FA* limitatam haberemus, nam

nam ſi à quadrato AI, ſiue á ſpatio FDE auferetur quadrati AD ſpatium, relictum prorſus euaderet, quod ſub AF in CG bis continetur, quod quidem duplæ CG adplicatum, oriunda latitudo eſſet FA.

At ex analogiſmo Algebriſtarum idem eruetur, ſi enim demittatur EL perpendicularis ſuper diametrũ, & á quadrato AC auferri intelligatur cordę EA quadratum, ſpatium relictum æquale eſſet FAQ ✠ FAL 2, dicatur hoc aggregatum Z planum, & quod ſub AL 2, quod notum eſt, ſit B, & quæſita FA dicatur A, ęquatio igitur ad analyſim ſtabit AQ † B in A ⊏ Z plano, quare ex analytico documento ſic explicabitur

$$LV(BQ\ \frac{1}{4} ✠ Z\ \text{pl.}) - B\ \frac{1}{2} ⊏ A$$

Nec ratiocinatio ſpecioſa à communi Algebriſtarum operatione diſtat, eiuſue demonſtratio ſic ſe habet. Sit igitur AP æqualis B, ſcilicet ĩ proximo adhibito epilogiſmo, ideſt duplæ AL, & diuiſa AP bifariam in R, erit AR æqualis ſemiſſi B, ſiue in ſuperiori figura AL, erigatur PL perpendicularis, & æqualis Z (ſeu in figura ſecunda problematis. DI quadrato) illud verò authores dicunt homogeneum comparationis, & iuncta RL fiat ſemidiameter, & ſemicirculus ſcribatur FL) erit æqualis FR, ex ipſa autem detracta AR cognita, habetur FA nota & quæ-



ſita æqualis ipſi A ignotę, quod erat intentum.

Atque hic ex data media Z, & differentia extremarum AP, aſſequuntur extremę, quarum maior ſit FP, & minor reliqua è diametro, quod incidenter ſub nectere libuit.

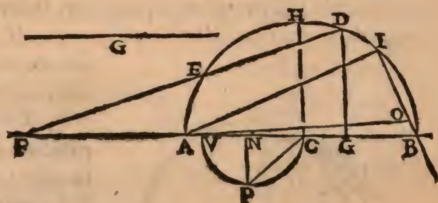
ADNOTATIO SECVNDA.

PRæmiſſi problematis licebit, & ab effectu veritas confirmari, nempè in ſemicirculo ADB poſita DF maior proportionalium trium inuenta vt ſupra, in qua fiat EL ęqualis FE, & demiſſis perpendicularibus HC, DG, etiam EK, EI perpendiculares fiant ſuper HC, & AC, iungaturque CE, & in hoc ſymptomate vbi de ſemicirculo agitur ſéper ęqualis erit AC, quod in alijs portionibus, vt infra non continget, erunt in triangulo CFL latera duo LF, LC analogicè ſecta per æquidiſtantem EK ipſi AB, quare æquales euadunt LK, CK: immò & duo triangula EKL, EKC ęqualia, vt facile poſſet concludi, vndè baſes EL, EC æquales, ſed erat EL æqualis EF, & EC ſemidiametro AC. Ergo conſtat propoſitum.

ADNO-

ADNOTATIO TERTIA.

QVum autem contigerit præfinitam inſerendam lineam dari diuerſam ab ipſa ſemidiametro, vti factum eſt ſupra in cōſimili caſu, neceſſe erit media attemperari pro qualitate datæ, vt ſi maior detur ſemidiametro, ſumenda venit linea, quæ poſſit rectan-



gulum ſub ſemiſſe datæ in ſemiſſem ſemicordę, vt in ſchemate ſemiſſis G ſit CV, ſemicordæ ſemiſſis CN, & ducto circello CPV, iunctaque CP, vt media inter C V, & CN, illa apponenda erit ad angulos rectos ſuper AI iam ſupra inuentam vt media, tunc cum adplicanda erit æqualis ſemicordæ, ſit illa IO, & ducta AO media emendata erit inter extremas reperiendas, quarum differentia ſit ipſa G data, & inuentis extremis, maior illarum DF aptata ex D puncto in occurſum ſemicordę, exiet intercepta EF æqualis G, quod vt ſupra oſtendendum fuerit, & ſi quidem G data ſemidiametro cedat, facta eadem conſtructione linea CP erit iuxta ſuam po-

F tentiam

tentiam minuenda à quadrato *AI*. Ita latus reliqui emendata habebitur media ad pręſtandum quęſitum.

PROBLEMA SEXTVM.

Datis iiſdem vt ſupra, punctum verò tantum conſiſtat citra verticem quadrantis, illud idem præſtare.

SIt ſemicirculus, in peripheria punctum *D*, linea verò ſemidiametro æqualis *AC*, ſecetur in *H* circulus, & deſcendant ad normã *HC*, *DG*, hæc producta ĩ *M*, iungatur *HM*, ſecta erit diameter in I: deindè portio *BI* ſecetur bifariam in *L*, & iuncta *DL*K, acquiritur punctũ K, ex quo in circulo *KE* æqualis *HM*, habebitur *E* punctum in peripheria, per quod ſi agatur ex *D* linea *DF*. Dico huius partem interceptam *EF* ab educta diametro, ac conuexo peripheriæ, ęqualem eſſe ipſi *AC*. Nam iuncta *DA*, eius quadratum ſuperabit ſpatium quod fit ſub *FDE*, per rectangulum ſub *FA* in *CG* bis: reſoluitur enim

enim per primam, ac 12 ſecundi in vtrumque, ſcilicet

$$EFD\,) \quad \&\ in \quad FAQ$$
$$\divideontimes EDF\,) \qquad \divideontimes FA\ in\ AG2$$
$$+ ADQ$$

At rectangulo *EFD* æquatur factum ſub *AFB*,

Ad 6. Probl. fol. 42.

blata è quadrato *DF* plus
A in *CG2*, ergo per anti-
quabitur *ADQ*, ſiue *EDF*
oc ſpatium ſi ad formam
FA in *CG2*, ſublatum ex
rati latus, nempè *DO* me-
edum extremas *DF*, *FE*,
t *FE*, & ęqualis *AC*, ſum-
one, ex æqualitate earun-
propoſitum, vt inculca-

PRIMA.

in ſuperiore alio caſu li-
uidatur *BG* bifariam in
HLK, porrò agatur alia
am *M*, & aptanda erit
ex *K* puncto, vt habea-
m *E*.
ortio determinata, &
n eſt ſupra determinari,

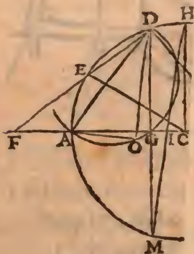
... puncti, & ex data linea fieret, vt adpli-

tentiam minuenda à quadrato AI. Ita latus reliqui emendata habebitur media ad prę∫tandum quę∫itum.

PROBLEMA SEXTVM.

Datis ijsdem vt supra, pun ... *consistat citra*
verticem quadrantis, illud

SIt semicirculus, in pe
rò semidiametro æ





in circulo KE æqualis I
peripheria, per quod l
huius partem intercept
conuexo peripheriæ,
cta DA, eius quadrat
FDE, per rectang

enim

enim per primam, ac 12 ſecundi in vtrumque, ſcilicet

$$\left.\begin{array}{l} EFD \\ \maltese\ EDF \end{array}\right) \ \&\ \text{in}\ \begin{array}{l} FAQ \\ \maltese\ FA\ \text{in}\ AG2 \\ \maltese\ ADQ \end{array}$$

At rectangulo *EFD* æquatur factum ſub *AFB*, ideſt *FAQ* ✠ *FA* in *AB*, at ſublata è quadrato *DF* plus æquo auferretur quam ſit *FA* in *CG2*, ergo per antitheſim *EDF* ✠ *FA* in *CG2* æquabitur *ADQ*, ſiue *EDF* ⩵ *ADQ* — *FA* in *CG2*, & hoc ſpatium ſi ad formam quadrati tranſeat, fiet *AOQ* ⩵ *FA* in *CG2*, ſublatum ex quadrato *AD*, & reliqui quadrati latus, nempè *DO* media emendata erit ad inquirendum extremas *DF*, *FE*, vt earum differentia rurſus fiat *FE*, & ęqualis *AC*, ſumpta enim fuerat in conſtructione, ex æqualitate earundem extremarum, & conſtat propoſitum, vt inculcari magis non ſit neceſſe.

ADNOTATIO PRIMA.

Illud idem punctum *E*, vt in ſuperiore alio caſu licebit aſſequi, vtpotè ſi diuidatur *BG* bifariam in puncto, & per idem ex *H* linea *HLK*, porrò agatur alia ex *D* in *C*, ibidem erit punctum *M*, & aptanda erit in circulo linea ęqualis *DCM* ex *K* puncto, vt habeatur rurſus in peripheria punctum *E*.

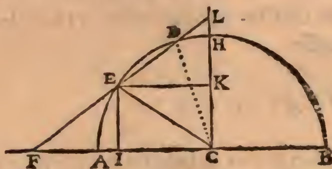
Cæterum habebitur *FA* portio determinata, & poſſet adhuc vlterius, vt factum eſt ſupra determinari, quod indicaſſe ſufficiat.

At ſi ex ſitu puncti, & ex data linea fieret, vt adpli-

cata excurreret tota extra peripheriam, hoc eſt tantum contingeret in *D*, tunc illa eſſet omnium quę dari poſſent minima ad efficiendum problema idoneæ, & ſi daretur alia poſſibilis diuerſa à ſemidiametro, tunc limitanda foret media *DO* inuenta, iuxta adnotata in cęteris præceptionibus, vt non oporteat idem opus repetere.

ADNOTATIO SECVNDA.

IDem oſtendere licebit in alia forma quaſi ab effectu, poſitò namque ſemicirculo *AHB*, & puncto in peripheria D, in eoque aptata linea DEF, quæ porrecta occurrat eductę CH in L, & demiſſis EK, & EI perpẽdicularibus ſuper oppoſitas, erunt CKE, LKE vt prius triangula ſimilia, & æqualia, & ideò LE, ſiuè FE æqualis AC, pertinetque ad punctum D; quare factum quod oportuit. Igitur conſtat quocumque caſu contingat dari punctum in peripheria, per methodum geometricam applicari ſemidiametro ęqualem lineam inter conuexum, & eductam diametrum, hoc eſt ſiue arcus, ſiue angulus congruus

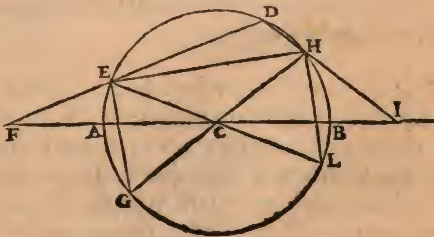


gruus in centro legitimè triſecari, vt arcus AE fiat triens arcus DB, ſiue ACE triens anguli BCD, vt incompetens, & abſurdum fiat prouocare ad poſtulatum ipſa Geometria expulſum.

PROBLEMA SEPTIMVM.

Dato in peripheria ſemicirculi puncto extra verticem quadrantis, oporteat duas inclinare ad diuerſa, diametro occurrentes eductæ, vt interceptæ ambo, abs conuexo æquentur diametro,

COmpleatur circulus in quo ſit poſitione punctum D, & acta, per aliquod præmiſſorum problema,



DEF, ex vna partium quod reliquum eſt per facilis quidem eſt, nam poſita *EG*, ſeu *HL* ſemidiametro ęquali, & per centrum conductæ *GCH* ſeù *LCE* punctum reliquum

quum reperitur coalternum, Immo ex altero inuento per ſolam adplicationem lateris Iſopleuris trianguli, vt ex *E* in *H* punctum erit quod queritur, nam quadratum *GH*, ſeù *LE* poteſt, & *GE* ſemidiametri, & Iſopleuri lateris quadrata, vnde ſequitur tàm *AE* trientem eſſe arcus *DB*, quam *BH* arcus *AD*, quod etiam de angulis in centro oppoſitis ratio eſt eadem, quare conſenſus animaduerti licet totius operis, pro diuerſitate puncti ſemper *LE*, *HG* ſecari bifariam in centro, non autem in alijs portionibus, vt infra.

PROBLEMA OCTAVVM.

Data portione maiore ſemicirculo, & puncto in peripheria dato vltra quadrantis verticem, linea verò ſemicordæ æquali, vt inter conuexum, & eductam cordam ponatur, & pertineat ad punctum datum.

SIt *ADB* portio maior ſemicirculo, punctum *D*, ſecetur in *H* bifariam peripheria, & perpendiculares in diametrum ſint *HC*, *DG*, & portio diametri *AG* ſecetur bifariam in *N*, & duæ deducantur lineæ *D NM*, *HGL* ſecantes peripheriam in punctis *M*, L, deindè iungantur *HM*, *DL*, & hæc iterum ſecabit diametrum in *I*, per quod, acta *HI*K, habebitur aliud punctũ in peripheria nempè *K*, ex quo ad partes *A* aptetur in circulo K*E* æqualis aſſumpta ipſi *HM*. Dico quod puncto *E* abſoluetur problema, vtpotè ducta *DE* in occur-

ſum

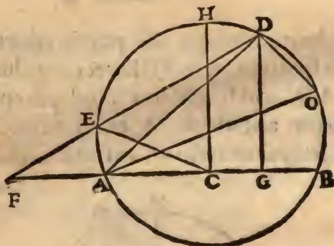
sũ cordæ protractæ *BA*, intercepta pars FE æquari ſemicordæ AC, quod vt abſq; confuſione linearũ oſtendi queat, ſit replicata portio ADB, in qua ex inclinata DEF, habetur limitata FA portio eductæ cordę, & cum CG bis ſpatium, quo FDE rectangulum ſuperat quadratum AD, cui ſi addatur illud potens, vt DO poſita ad rectum angulum, & connexa AO, emendata fiet media proportionalis ad extremas inueniẽdum in ſerie trium, & differentia extremarũ ſit ſemicorda, quibus inuẽtis, DF maior fiet, minor verò DE, vt per repetitionẽ earum reſolutionum, vt in conſimili oſtendetur, quoniam in ambligonio ADF triangulo, latus maius DF poteſt duo quadrata

AF,

AF, AD, plus eo quod fit ſub FA in AG bis, & pariter reſoluitur idem in duo rectangula EDF, EFD, quæ comparata, vt factum eſt ſupra, erunt

EDF) æqualia *FAQ*
✱EFD) *✱FAG2*
✱ADQ

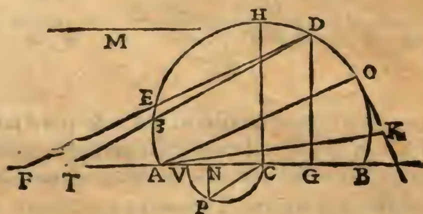
Verum duo FAG rectangula, vna cum qnadrato FA excedunt AFB rectangulum in eo, quod AG bis ſuperat cordá A*B*, hoc eſt per CG bis, ablatis ergo ęqualibus, ac reliquis collectis, fiet *EDF* rectangulum æquale ⊏*ADQ*† *FA* in *CG* 2, quare ad extremas inquirendum in ſerie trium proportionalium media fiet, quæ poſſit *FD* in *DE*, ſic differentia earundem erit *FE*, at eaſdemmet extremas acquiſimus ex media *AO* potens, nempè idem *FDE* rectangulum, & differentia *AC*; quare conſequitur neceſſario fieri æquales *AC*, & *FE*, & pertinet ad punctum *D*. Ideo factum quod oportuit.



ADNO-

ADNOTATIO.

CVm in vertice portionis dabitur punctum H, media perpetuò erit ducta AH, & extremarum differentia ſemicorda AC, vt in ſemicirculo eſt demonſtratum, ita adplicata inter conuexum & eductam cordam æqualis ſemicordæ euadet, quod ex ſupra deductis facilè poſſet confirmari; cùm verò aliundè à vertice D punctum datur, tunc limitari oportet media pro quālibet datæ lineæ magnitudine ſingulatim. Sit portio ſemicirculo maior ADB, punctum D vltra verticem, longitudo lineæ M, & ſit iam ducta DT,



quæ det T3 adplicatam æqualem ſemicordę, & potens TD3 ſit AO, accipiatur ſemiſſis M in CV, ſemiſſis ſemicordę in CN, & quod rectangulum poſſit ſub VC in CN ſit CP, addatur ad AO in angulo recto, & ſit OK ęqualis PC, duoque quadrata AO, & OK linea ſit poteſt AK, quę erit emendata media, vt inueniantur extremę ex datis ſcilicet AK media, & differentia extremarum ipſa M, quę de more ſi reperiantur, & maior earundem DF ex puncto D ponatur inclinata ad

G occurſum

occurſum eductę cordę relinquetur intercepta eius pars *FE* á conuexo, quæ ipſi *M* præfinitę erit æqualis, quod quidem per eadem tranſeundo veſtigia, poſſet ordinari demonſtratio, cumque abundè ſuperius repetitum ſit in hiſce vlterius immorari cenſemus forè inoportunum, & ſi quidem ſemicorda *AC* maior eſſet ipſa data, quadratum OK eadem via obtentū ſubducendum foret è quadrato *AO*, & quod reſiduum poſſet, linea ſcilicet lateris eſſet ponenda media, ſed cum data pro differentia extremarum inuenientur extremę, & illarum maior, à puncto *D* inclinata caderet inter *A*3, quod etiam pro ijs, quæ ſequentur adnotatum eſſe volumus, abſque eo quod iterentur.

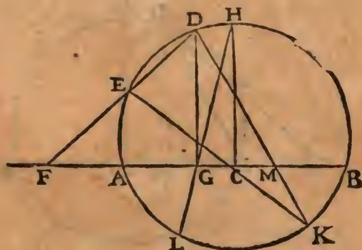
PROBLEMA NONVM.

Iiſdem quæ ſupra datis, ſitus attamen dati puncti citra conſiſtat verticem, illud idem efficere.

SIt portio *HDB* ſecta bifariam in *H*, & punctum *D* datum citra verticem portionis conſiſtat, linea

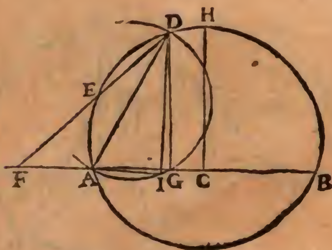
verò

verò aptanda æqualis ſemicordę, demittantur normaliter *DG*, *HC* ſuper cordam, & pars comprehenſa *BG* diuidatur bifariam in *M*, & duę agantur lineæ *DM*K, *HGL*, deindè à puncto inuento K, ponatur in circulo K*E* æqualis ipſi *HL*. Dico quod puncto *E* efficietur problema, nēpè productis *DE*, *BA* committētes ſe in F puncto, fieri adplicata *EF* æqualis ſemicordę *AC*, ponatur eadem portio in coæquali, vt in ſchemate ſecundo, & ducta *AD*, ab eius quadrato erit ſubtrahendum quadratum ęquale ei rectangulo, quod fiet ſub *FA* in *GC* bis, & ſit *AI*, reliqua iuncta *DI* erit, quę ſumenda, vt media in ſerie trium proportionalium ad extremas inueniendas, cum illarum differentia *AC* ſemicordę, & erit maior illarum *DF*, de more ponenda ex *D* in occurſum eductæ cordæ, & harum demonſtratio ferè per repetitionem conſimilium oſtendi poſſet, quod non eſſe opus, ex dictis patet.



ADNOTATIO.

ET in hoc casu ex situ puncti D dati contingere posset, vt tota DF extra peripheriam caderet, hoc est tangentẽ esse, & ideò minima fieri omnium, quę inclinari possent per peripheriam HD, & siqui dẽ linea adplicanda fuerit á semicorda diuersa, iam plus quam semel tradidimus formam limitandi mediam, vt cum data tanquam differentia extremarum extremæ exhibeantur.



PROBLEMA DECIMVM.

Sit tandem data portio, quæ semicirculo cedat, & punctum datum, vltra verticem, adplicanda verò semicordam adæquet, oportet idem præstare.

Compleatur circulus, & in H secetur bifariam portio data AHB, in qua punctum D datum, demittantur

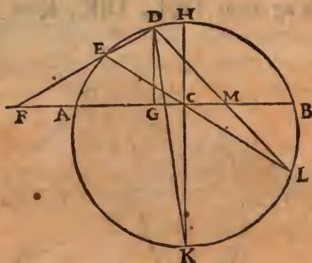
tantur HC, DG perpendiculares, deinde portio BG secetur in I bifariam, & agantur DCL, DIK, & ex K in circulo aptetur KE æqualis ipsi DL, & assequetur punctum in peripheria E, quo effici problema, si vlterius progredi libeat non discedēs à pręmissis cō similibus ostē di posset, & nos vt superflua non repetimus.



PROBLEMA VNDEMVM.

Iisdemmet datis, tantum consistat punctum citra verticem portionis, & illud idem efficere.

COmpleatur circulus, & data *ADH* portio bisecetur in *H*, & vt supra *HC*, *DG* perpendiculares, á puncto nempè dato *D*, portio deindè *GB*, in *M* bifariam secta, & porrecta *HC* ad peripheriam in *K*, duæ agantur *DK*, *DML*, à quo *L* inuento puncto ponatur in circulo *LE*, quæ assumatur æqualis *DK*, & dabitur



bitur punctum *E*, per quod si agatur *DEF*, fiet adplicatà *EF* æqualis semicordæ AC, quod ad instar aliorum casuum erit ratiocinandum.

ADNOTATIO.

ET in hoc casu eadem cautio recurrit, vt ex situ dati puncti, ac magnitudine lineæ posset totam extra peripheriam excurrere extra circulum, tangensque tantum fieri ad D punctum, verum si linea diuersa ab ipsa semicorda exponatur iam diximus ea qua limitanda media vt, idonea euaderet,

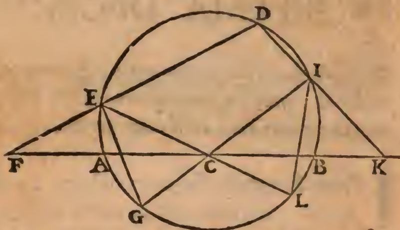
Cęterum in portionibus supra, vel infra semicirculum potest linea adplicari ad instar semicirculi, vt adplicatæ ęquales fiant cuilibet datæ supra, vel infra, aut ipsi semicordę, at sectio tripartita arcus siuè anguli numquam succedet, nisi in semicirculo, & cum intercepta fiet æqualis semidiametro, etenim propria est semicirculi, ac semidiametri passio, quæ ad portiones negat natura communicari cęteras.

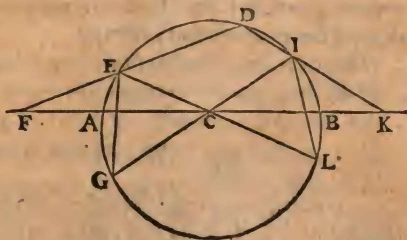
PRO-

PROBLEMA DVODECIMVM

In portionibus à semicirculo diuersis, dato pũcto, & nõ in vertice, licet ex vtraque parte inclinare duas occurrẽte porrectæ cordæ, adeò vt, & æquales fiant, & cordã simul adæquent.

IN portione siuè maiore, siuè minore semicirculo signetur D punctum extra verticem, & ex congruo suo proble-mate ex su-pra indu-ctis agatur siuè *DEF*, siuè *DIK*, vt interce-ptę *FE*, vel IK sĩt ęqua les semicor dę, & per pũctum *C* cordę dimi diũ signãs, agatur *EC L*, vel *IC G*, habebi-tur & vicis sim, aut pũ ctum *I*, aut punctũ *E*,





& erunt

& erunt aptatę *EF*, Ik ęquales ipsi *AC*, vt simul connexę sint ipsa corda *AB*, & in hoc agnoscitur elegans rei naturæ consensus, vt in semicirculo diximus in consimili iunctæ lineę *LCE*, *GCI* per centrum transire, hìc per semissem cordę, etenim triangula duo *CEG*, *CIL* fiunt ęqualia, & similia, & addito trapezio *CIDE* communi, ęqualia fiunt duo alia *IDEG*, *LIDE*, nec vlterius afferetur ostensio quum ex singulis pręmissis pendeat.

PROBLEMA DECIMVMTERT.

Data portione semicirculo maiore, & in peripheria puncto, ac præfinita, quam aptare oporteat, vt inter conuexum, & porrectam cordam, ad datum pertineat punctum.

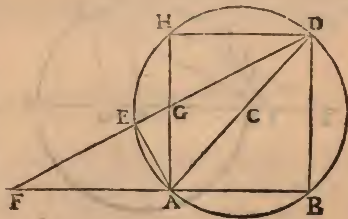
IDem fatemur esse cum octauo, vel nono problematis, sed ideò proponitur rursus ad vsum, & vt propositio sexta supplementi Vietæ ad methodum reuocetur geometricam, Ibidem namque author sic sub alijs verbis proposuerat, nempè.

„ *Datis ex tribus propositis lineis proportionalibus, prima,*
„ *& ea, cuius quadratum æquale sit ei, quo differt quadra-*
„ *tum compositæ è secunda, & tertia, à quadrato compo-*
„ *sitæ è secunda, & tertia; inuenire secundam, & ter-*
„ *tiam proportionales.*

Constructio Vietęa fuerat, ex tribus in analogia, data prima *AB*, & recta *BD*, cuius quadratum æquale sit ei, quo differt quadratum compositę è secunda, &

tertia,

tertia, à quadrato compositæ è secunda, & prima, vt discernantur proportionales, secunda & tertia. Componantur ad angulos rectos *AB*, & *BD*, & iungatur *AD*, quæ statuatur diameter circuli è centro *C*, à puncto autem *D* in eductam cordam *BA* inclinetur linea *DF*, adeò vt intercepta circuli conuexo, nempe *EF* æqualis fiat præfinitæ, scilicet *AB* (huc vsque se haberet rectè constructio, nisi pro inclinanda linea *DF* suppetias author ex postulato requisiuisset) at modo per ea, quę à nobis sunt superius allata per congruum problema, nam portio *AHDB* præstat semicirculo, agatur *DF*, adeout intercepta *FE* portio sit æqualis præfinitæ *AB*, absoluta constructione in ipsa demonstrationis serie imperfectio nulla est: resumamus igitur authoris verba, iũgantur *AE*, & *AH* æquidistans euadat *BD*, & agatur *DH*,



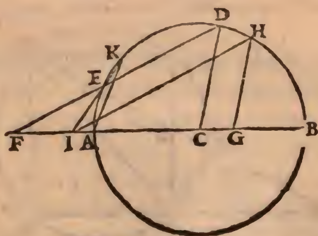
erunt triangula *DGH*, *AEF* similia, & æqualia, nam anguli ad *E* & *H* sunt recti, & *AFE* suo coalterno *HDG* sit æqualis, latera verò *DH*, seu *AB*, & *FE* æqualia sunt ex constructione, est autem vt *BA* ad *AF*, ita *DG* ad GF, siue *FA* ad *FG*; sunt ergo tres proportionales

BA, *AF* (ſeu *DG*) & *FG*; at *BF* compoſita eſt ex *BA*, & *AF*, prima nempè & ſecunda; *DF* verò compoſita ex *DG* & *FG* ſecunda, & tertia; quadratum denique ex *DF* differt à quadrato *BF* per quadratum *BD* datum, & factum erit quod oportuit.

PROBL. DECIMVMQVARTVM

Heptagonum regulare in circulo geometricè deſcribere.

HIc Vietæam methodum, quæ poſtulato hærebat inuiſo curamus expurgare, expoſituri nihilominus vniuerſale infra pro quocumque polygono ordinato laterum imparium, & quidem cum ſupra angulum planum trifariam ſecuimus, iá facilè exſurgit heptagoni deſcriptio, quæ deinceps adhuc facilius perſoluere oſtendemus. Ad propoſitionem 19. ſupplementi ſic habet author in conſtructione heptagoni. Sit circulus cuius centrum *C*, diameter *AB*, eius triens ſit *BG*, iungatur *GH*, ſumpta ſcilicet triente ſemicirculi *BH*, cui æquidiſtet



diſtet ex centro, *CD*; ex puncto *D* agatur *DF*, itaut *EF* ęquetur ſemidiametro *AC*, quod fieri poſſe geometricè oſtendimus in quinto problemate, & huic ex *H* puncto æquidiſtans fiat *HI*, porrò ex I puncto ponatur in circulo linea IK æqualis ſemidiametro *AC*. Dico arcum *A*K ſeptimam partem eſſe totius circuli, nec vlterius hìc cenſemus demõſtrationem addere oportunũ, poterit namque quilibet ſtudioſus apud authorem inquirere, & quod aliàs ſubobſcura, à plurimis videbatur, longè facilior in nupera editione Batava (qua cuncta prius impreſſa vno comprehenſa habentur volumine) nam ab eximio Mathematico Franc. Schooten (qui curam totius operis repurgandi in ſe ſuſceperat, & elegantiſſimè abſoluit) huic propoſitioni fuit ſubiunctum ſcholium, ſibi ex noſtra tranſmiſſum Italia, ad locũ illuſtrandum ſatis idoneum, vt ipſemet teſtatur in notis.

ADNOTATIO.

NON pauci pro deſcriptione heptagoni laborarunt, & ferè omnes in vna ſuarum Decadum Io: Camillus Glorioſus retulit, & vt Pſeudographos reprobauerat, deinceps ſanè erunt ab ipſa Geometria exulandi, nam & heptagonum, & alias figuras imparium laterum, facultas ipſa exhibet, vt infra docebimus, quod hactenus inter impoſſibilia erant collocata, & nihilominus adeò faciliter traduntur, vt melius optare cenſeatur minime poſſe quicquam.

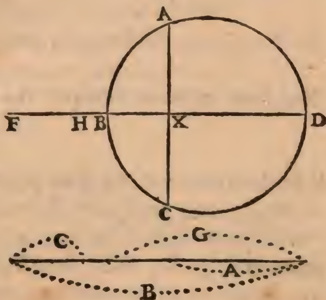
PROBL · DECIMVMQVINTVM

Datam ſphæram ita ſecare, vt portiones inter ſe ſint in ratione data.

DEſumimus hoc ex ſecundo de ſphęra, & cilindro, propoſitione quarta eximij illius Siculi Senis, & libenter ſupponimus authoris, quæ ad noſtra non peruenere tempora ignota haud eidem potuiſſe haberi, attamen, quæ à ſcholiaſte Eutocio, & nuper à Fleurantio repaſtinata videntur, ad conſtructionē completam nihil conferre omnes fatentur, vt opus fuerit ſuppetias è mechanicis implorare: nos verò profitemur cuncta debere expelli, cum viderint ſtudioſi per ſua principia facultas ſibi ſufficere.

Sit igitur ſphęra ſecanda ABCD tali plano, vt vna portio ſe habeat ad aliam in ratione R ad S data, ponatur factum, vt cum Analyſtis rem abſoluamus, & ſectio facta erit, circulus ijſdem elemētis ſignatus, eius diameter, atque axis BD, cui indirectum ea quæ ex centro æqualis adijciatur BF, deindè eadem ſecetur puncto H, vt ſit FH ad HB in ratione data R ad S, porro tum analyſis, tum ſyntheſis Archimedea cò conducit, vt oporteat iterum diametrum BD nouo ſecari puncto, vt verbi cauſa in X, et fiat quadratum partis DX ad quadratum diametri BD, vt longitudo FH ſe habet ad longitudinem FX, quo facto conſequēter oſtendit author, quod planum ſecans ſphæram per

per punctum X transiens, et diametro insistens ad normam quęsitum absoluere, hoc est fieri ADC portio ad portionem ABC in eadem esse ratione, veluti *FX* ad FH, scilicet R ad S, quare puncti illius *X* inuentio fuerat scopulus, in quem impacti hactenus omnes labores declinarũt proprios. Transponatur *FD* linea, (quę continet ter semidiametrum sphęrę) et simul concessis punctis, deinde per analyseos præcepta *DF* dicatur *B*: portio *FH* dicatur esse *C*: et diameter vocetur G, demum ignota *DX* sit *A*, vt *FX* fingatur esse *B* -- *A*, ex hisce per consequentia artis analyseos, quod ignotum est manifestum fiet, etenim dicebamus debere esse in analogia *GQ* ad *AQ*, vt *B* -- *A* ad *C* quartum, scilicet illud est vt *DBQ* ad *DXQ*, sit *FX* ad *FH*, porrò ad ęqualitatem conuersa analogia, solida facta ęqualia erunt



$$GQ \text{ in } C = \begin{matrix} B \text{ in } AQ \\ -- AC \end{matrix}$$

Igitur res deuoluta est ad analyticum tertium ex supra inductis ab Andersono, nempè.

Ex serie

„ *Ex ſerie quatuor proportionalium data ſecunda, & ag-*
„ *gregato primæ, & quartæ exhibere proportionales.*

Quare ſi inter *G*, & *C* magnitudines datas, inueniantur binę in analogia cōtinua, erit illarum prima maior latus cubi ęqualis ſolido, quod fit ex *GQ* in *C*, ſit illa *D*, ęqualitas ergo erit noua,

$$D \text{ cubus} = \begin{matrix} B \text{ in } AQ \\ -- AC \end{matrix}$$

Et ideò latus cubi *D* erit in analogia quatuor proportionalium ſecunda nempè

$$\overset{1}{A};\ \overset{2}{D};\ \overset{3}{\frac{DQ}{A}};\ \overset{4}{B--A},\ \&c$$

ſi quidem manentibus aliis, prima, & tertia ęqualiter multiplicentur per ipſum A, analogia non turbabitur & erunt $\overset{1}{AQ}$, $\overset{2}{D}$, $\overset{3}{DQ}$, $\overset{4}{B--A}$, iterum proportionales, ſicque vt prius adparet, quod factum ſub extremis æquatur facto ſub medijs, cumque prima ſit A, ſecunda *D*, & adgregatum primæ & quartę ipſum *B*, è quo ſi auferatur prima *A*, relinquetur quarta *B—A*, & ducendo ſecundam in quartam fiet compoſitum ęquale quadrato tertię, ergo

$$\begin{matrix} D \text{ in } B) \\ -- D \text{ in } A) \end{matrix} \text{ ęquale } D \text{ quadrato},$$

porrò ſi ordinetur æqualitas, ſegregando ſcilicet à notis ignota, erit

$$\begin{matrix} D \text{ in } B \\ -- DQ \end{matrix} = D \text{ in } A,$$

adhibita nēpè antitheſi, ergo ſi abs facto plano rectangulo ſub *D* in *B* lateribus auferatur *D* quadratum, & quod eſt reliquum dicatur *F* quadratum, tunc æqualitas redit

FQ-

FQ = *D* in *A*, & reuocata ad analogiam

Ita *D* ad *F*, vt *F* ad *A*, at magnitudines tres priores notæ ſunt, quarta igitur ſtatim innoteſcet, quę fuerat *A*, nimirum *DX* in ſchemate, ergo punctum X quæſitum ſignatum habetur, cumque ab initio erat conuertendo,

vt *DXQ* ad *BDQ*, Ita *FH* ad *FX*

planum tranſiens ad rectos angulos ſuper diametrum, hoc eſt *AXC* ſecabit ſphæram in duas portiones *ADC*, & *ABC* in ea ratione, vt *FH* ad FX, ſcilicet *R* ad S data, quod erat faciendum.

ADNOTATIO.

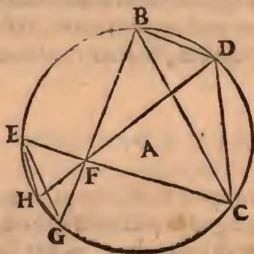
AD huius inſtar nō pauca apud Authores plurimos poterunt reſtitui, & ad genus planorum penitus reuocari, quod relinquimus otioſioribus, nobis ſatis fuerit aperuiſſe methodum, ac prętuliſſe facem.

PROBL. DECIMVMSEXTVM

In vno, eodemque circulo ſimiles, ac inæquales duas portiones ſuſcipere.

SIt circulus circa A centrum, & in eo ducatur quęlibet linea diametro minor, vt BC (etenim propoſitio eſt de portionibus inæqualibus) fiant ſuper extrema puncta BC anguli ſemirecti CBF, FCB, erit reliquus

quus angulus *BFC* in eodem triangulo rectus, & productis lateribus *CF*, *BF* vſque ad peripheriam, & iuncta *EG*, etiam in alio triangulo *EFG* ſemirecti fient anguli ad baſim *EG*. Dico quod portiones *BDC*, *EHG* ſunt ſimiles in eodem circulo, & quod inæquales ſint probari non debet ex euidentia. Accipiatur aliquod



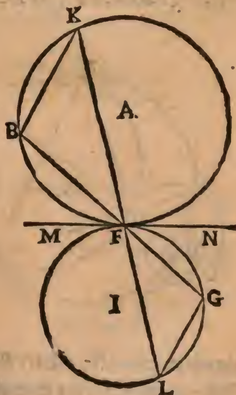
punctum D, & hoc ad libitum, ex quo per F communem verticem ducatur DFH, portiones oppoſitè ſecabit ſimiliter, et fiet, vt BD, ad DC, ita GH ad HE, ſi enim iungantur cordę BD, CD, nec non HG, HE, anguli BDH, BGH ſuper eandem peripheriam BEH ęquales ſunt, vt etiam anguli DHG, DBG ſuper eandem inſiſtentes peripheriam DCG pares ſunt, reliqui verò ad F ſunt verticales, quare ex ipſa similium definitione figurarum, illa duo triangula similia eſſe non poteſt infici, et eodem prorſus modo similia fiunt duo oppoſita alia triangula EFH, DFC demonſtrari poterit, & quibuſuis aliis productis per aliam lineam è puncto in diuerſo situ abs D, Ideò ratio eadem fit arcus BD ad DC, quę GH, ad HE, siuè alternè B*D* ad GH, vt DC ad *HE*, siuè componendo, et per conuersionem, siuè diuidendo, igitur nihil officit ad argumentan-

dum

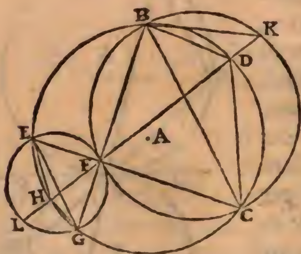
dum de angulis ;vt factum eſt de peripherijs ſimul congrue ad centrum poſtea relatis, quare in circulo eodem duę ſumptæ fuerunt portiones ſimiles, & inęquales, quod erat faciendum

ADNOTATIO PRIMA.

VErum quę recenter inducuntur niſi ad vltimum principiorum fuerint reſoluta agnouimus frequenter ingerere ſcrupula, præſertim ijs, qui non admodum ſunt prouecti, & ad criticen fiunt procliuiores, vt igitur omnibus fiat ſatis, & ſequentium pateant fundamenta facilius, ſint duo inæquales circuli ſe contingentes in *F* puncto, quorum *A* & *I*, centra, conſtat ex 12. tertij elementorum, puncta eadem ſi iungantur tranſire per punctum contactus, & æqualiter circulos ſecari ; at ſi per duas quaſuis lineas non per centra, in puncto tamen *F* contactus se ſecantes, portiones ex aduerſo ſimiles fieri, vt in ſchemate *BG*,*KL*,& iunctę *BK*, *LG* nec non coalternę por-



tiones ſimiles eſſe, nam duo ſunt triangula *BFK*, *GFL*, & per contactum ad angulos pares ducta *MFN*, iam anguli *MFB*, *BKF*, vt in coalterna portione ſunt ęquales, ſicut *NFG*, *FLG* eadem ratione ſunt ęquales, ſed anguli *MFB*, *NFG* ſunt verticales; ergo anguli *BKF*, *GLF* ſunt æquales, quare æquiangula triangula fiunt, & portiones æqualibus angulis competentes ſimiles fiunt, & quod in diuerſis circulis contingit, in vno & eodem fieri circulo, aſſumi poſſe oſtendit problema pręmiſſum, & ſic euidentius licèt confirmari, nam ſi circa duo triangula *BFC*, *EFG* ſcribantur circuli ſe contingentes in *F*, & *DH* ducta linea, ex vtraque parte educatur ad ſigna peripheriarũ *L*, *K*, portiones *BD*, & *GH* ſimiles fieri iam planum eſt in vno eodemque circulo, veluti in diuerſis *EFGL*, *CFBK* triangula *BKF*, *GLF* ſimilia, & ita ſe habere *BD* ad *GH*, peripheriæ eiuſdem circuli, ſicuti *BK* peripheria vnius ad *LG* peripheriam alterius circuli, ob ſimilitudinem triangulorum *BFK*, *GFL*, ergo & permutando erit ita *BD* peripheria ad *BK* peripheriam vt *GH* ad *GL*, arcus ad arcum, quod hæ comparationes & omnes alię fieri



pote-

runt ob similitudinem arcuum obtendentium angulos æquales, nam omnes ad vnum relatæ portiones circulum, habebunt angulos proportionales, competentes peripherijs inæqualium partium vnius, siuè diuersorum circulorum.

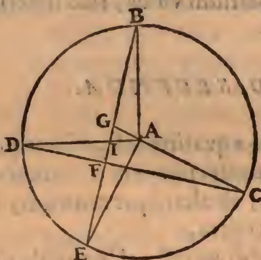
ADNOTATIO SECVNDA.

DVÆ lineæ in circulo æqualiter se secari non posse Elementator ostendit, nisi per centrum transeant, & si altera bifariam, ab altera per centrum, fieri ad angulos rectos, & è contra,

Cui non incongruè addi potest, si in circulo sint duę æquales lineę se secantes, numquam vicissim in partes ęquales nisi se comittant ad ãgulos rectos, nec similitudo exurget nisi partes reciprocè adęquantur. Sint in circulo, cuius A centrũ duæ ęquales lineæ DC, BE ita compositę ad angulos rectos in F, vt se secent, & pars BF vnius sit ęqualis parti alterius FC, sicque DF huius reliqua ęquetur FE alterius, tunc continget portiones BC, DE in eodem circulo similes euadere, quod in problemate est demonstratum,



anguli deindè diuerſorum circulorum reuocantur ad centrum vnius, ſiuè anguli ſimilium partium in vno, & eodem ad centrum per incrementa, & dęcrementa penitùs paria, vt in circulo ſi iungantur lineę *BA*, *DA*, *EA*, *CA*, angulus rectus extra centrũ *EFD* reuocatur ad veram quãtitatẽ anguli *DAE* in centro debitam arcui *DE* per decrementa, nam ſi auferatur angulus *ADF* in triãgulo *IFD* relinquetur externus *DIF* angulus, à quo iterum auulſo angulo *AEI* habetur in centro angulus *DAE*, & ſanè decrementa ſi accedant angulo conuerticali *BFC*, angulus redibit *BAC* arcui *BC* competens, etenim si angulo recto *BFC* accedat *GCF* angulus, erit horum ſumma externus (porrecta *CA* in *G*) *BGA*, cui rurſus additus *ABG*, fiet ſumma angulus in centro *BAC*; ſed duo decrementa *FDI*, *AEG* ęqualia ſunt incrementis *GCF*, *ABG* ex vi ęqualium Iſoſcelium, & angulorum ſupra basim, & hęc addere ſuſtinuimus ad omnem tollendum ſcrupulum in ſequentibus pręter familiarem nobis ſtilum.



PRO-

PROBL. DECIMVMSEPT.

Angulum planum quemcumque secare tripartitò, & in alia qualibet analogia, per solas quippe lineas rectas.

SVpra ex peripheria semicirculi, & lineas rectas geometricè angulum secuimus planum trifariam, modò per solas lineas rectas, non tripartitò tantum, sed in alias impares secari aggredimur partes, & quidem de trisectione tùm alibi, tum in octauo Geometriæ practicæ libro ad xxv. propositionem agens Clauius sanè inter scriptores clarissimus vtebatur Nicomedeo artificio in describenda Conchoide, cum aptius nihil haberetur, quod quidem mechanicum si rectè animaduertatur nos in primo problemate expunximus per opus legitimè Geometricum. Interim Clauij verba addi hìc possunt, & sunt sequentia

„ *Problema hoc veteres diù multumq; exagitauit, nec ab*
„ *vllo ad hanc vsque diem geometricè solutum est, &c.*

Quis vtique si dixisset augulum planum secari vlterius á tripartitò per loca imparia, in desperatam respondissent vniuersi solutionem incidere, at me memineram aliquando occurrisse in ijs, quæ omnium Geometrarum maximus scripserat Dositheo suo, initio scilicet libelli de spiralibus, vbi sic ait Archimedes.

„ *Quot in Geometria visa sunt primum impossibilia, quæ tempore suam capiunt perfectionem.*

Quæ quidem verba fateor plurimum me iuuasse,

adeo

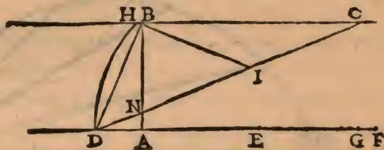
adeò vt in animum induxeram firmiter, in philosophando minimè oportere in aliorum acquiescere sententiam, vbi nulla emergeret impossibilitas, Immò nec ignotum fuerat mihi, tantò præstantiora semper haberi inuenta, quantò minus operosa, quia ad naturæ rationem videantur accedere simpliciora, quam magis composita, idcirco omnes intenderam neruos, vt veterum, ab vsu omni ablegarentur machinamenta,& quid in hoc profecerimus aliorum est iudicium, ac fortasse non abludet vatis illud elegans

Nec omnia grandior ætas,

Quæ discamus habet: Seris venit vsus ab annis.

Proponimus igitur ex sui natura in infinitum secari angulum planum posse, per solas lineas rectas, nisi ob nimiam ipsarum inclinationem difficultas emergeret, & hanc etiam euitabimus in proximo problemate. Sit interim propositus angulus trisecandus *ADB*, demittatur perpendicularis *B*A, & punctum *B* arbitrariè sumptum, ducat parallelam *BC* ipsi *DA*, deinde ex *A* ponatur *AF* æqualis duplæ *BD*, & *AF* diuisa bifariã in *E*, quo facto centro, ac distantia *ED*, vel circuli pars scribatur *DH* (& quia punctum *B* potest infra si oporteat accipi, semper resecabitur parallela in *H* puncto, quocumq; cadat) porrò sumpto interuallo *FH*, transferatur in *DG*, & portio *A*G in *BC*. Dico puncto *C* effici quæsitum, nimirum ducta *DC*, secare angulum trifariam, quoniam igitur in problemate huius opusculi primo demonstratum est, eadem constructione fieri *NC*, *AF* lineę æquales, si diuidatur *NC* bifariam

fariam in *I*, ibique centro, ac interuallo *IC*, ſeu *IN* circuli, vel ſemiſſis ſcribatur, neceſſariò tranſire per punctum *B* ob angulum rectum euidens eſt; igitur ducta *BI*, quatuor lineæ erunt *CI*, *IB*, *IH*, *BD*, duo conſtituentes iſoſcelia *BIC*, *DBI* æqualiũ crurũ, & ideò



angulus *BID* externus trianguli *BIC*, duplus interni alterutrius, ſ t *BCI*, at *BID* angulus ęquatur *BDI*, in alio Iſoſcele, quare anguli *BCD* etiam duplus ſit angulus *BDC*, & ambo *BDC*, *BCD* adequat angulus externus *DBH*, ergo ſit *DBH* triplus interni *BCD*, ſed angulo *DBH* eſt coalternus *BDA*, eidem æqualis, vt *ADN* coalternus angulo *BCD* æqualis, relinquitur ideò *BDC*, duplus anguli *ADN*, quare totus *ADB* datus angulus trifariam eſt ſectus, eiuſque triens *ADH*, quod erat fieri imperatum.

Sit deindè angulus *ADB* ſecandus quintufariam, ijsdem inſiſtendo veſtigijs perficietur, limitari tantum eſt opus appoſitam *AF* indirectum ipſi *DA* protractã, & in hoc caſu fiat, vt contineat ipſam *BD* ter cum ſemiſſe vnius partis, deindè diuiſa *AF* in *E* bifariam, & diſtantia *ED* acquiratur *H* punctum, & linea (ſi duceretur) *HF* reponatur in *DG*, ſicuti *AG* in *BC*, quod

& ſupra

& ſupra idem factum fuit. Dico *C* puncto fieri quæſitũ.

Etenim ſi ſcriberetur circa *NC* ſemicirculus, vtiq; tranſiret per *B* ob rectum angulum, & ſi *DB* amplitudo alterni ponatur in *BL*, *L*K, K*I*, *IC*, erunt quatuor iſoſcelia æqualium crurum *CI*K, *KIL*, *L*K*B*, *BLD*, quare externus angulus K*IL* fiet duplus interni *ICK*, & *L*K*B* triplus, *BLD* quadruplus, & demum in totali triangulo *BCD* externus angulus *DBH* fiet anguli eiuſdem *BCD* quintuplus, hoc eſt *BDA* coalternus illi quintuplus anguli *ADN* coalternus *DCB*, quare angulus datus *BDA* ſectus eſt quintuſariam, eius quintans *ADN*, quod erat, &c.

ADNOTATIO PRIMA.

NEque in alijs ſectionibus imperatis imparium varium quicquam occurret, tantùm pro ratione mul-

ne multipla longitudo lineæ *AF* venit limitanda, & pro hac damus hic canonis partem ampliandam si lubeat, at vt innuimus subobscurè apparebunt puncta ob nimiam inclinationem, quod quidem impedimentum auferetur in sequenti opere per suum genus proximum expositu ri.

Pro anguli plani trisectione per lineas rectas longitudo proportioue.

AF ad *BD* fiet	vt	2.	ad	1.
In quintupla sectione	vt	7.	ad	2.
In septupla sectione	vt	5.	ad	1.
In noncupla sectione	vt	13.	ad	2.

& sic vlterius si placet per additionem proportionis sesquialteræ $\frac{3}{2}$ ad proximè sequentes impares,&c.

ex hisce agnouerint eiusmodi rei studiosi, quid accessurum ad libellum Vietæum, & ad notas Andersoni, ad sectiones angulares, inuentum planè ratiocinij acutissimi, sub inuolucris graduum, ac potestatum, indicare analogias, inter latera se se in multipla ratione excedentium angulorum, verum ipsorum triangulorum exhibere magnitudines non poterant, negotium purum est geometricum, & ab ipsa accuratè tantum expectandum.

ADNOTATIO SECVNDA.

VErum angularis sectio in propria sui natura esse circularis, & in suo genere exercenda, omnes

K cogun-

coguntur fateri, quæ verò alia methodo, siue per rectas, & circulares, siue per rectas lineas, vt proximè factum est, suas habent limitationes, aut si mauis imperfectiones, tantùm liberè, perfectè fieri queunt sectiones ex congeneo sibi arcu, quo igitur adhibito, feliciter per sectiones omnes pares, ac impares, effabiles, aut ineffabiles progredi, aut regredi licebit, ad hęc si respexissent veteres exequandi, ac explendi lacunam hanc ipsis tàm vastam vtique nobis haud reliquissent onus, at quod arduum videbatur, ingressi naturæ vestigia facillimum experitur.

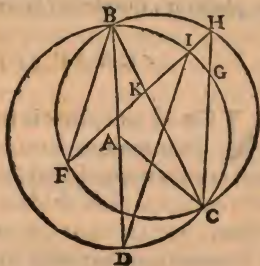
PROBL. DECIMVMOCTAVVM

Angulum datum planum secare trifariam per circuli peripherias expedire sectiones omnes poteramus vno actu generali, at lubet incitati rei pulchritudine per non nullos excurrere, & vt ijs qui hoc fieri posse inficias iuere, directè opponamus factum scilicet pro heptagono, ac enneagono &c.

SIT itaque angulus *BAC* trisecandus, siue eidem congruus arcus *BGC*, ducatur *BC*, & circulo completo *DBGC*, in eo ponatur *BG* amplitudine semidiametri pars sexta *BG*, & semicirculi triens, deinde circa cordam BC perficiatur circulus alius *BFCH*, in quo sumatur quadrans *BE*, aut *FC*, deinde ex puncto *C* per *G* datum punctum in peripheria ducatur recta *CGH*, secabitur circulus *BFCH* in puncto *H*, ad quod si ex puncto quadrantis *F* deducatur linea *FH*, iterum secabitur

circu-

circulus prior *DBGC* nouo puncto in *I*. Dico abſciſſam portionem *BI* trientem eſſe portionis *BGC*, ſeu ad angulum in centro relatæ, angulus *BAI* (ducta *AI* non eſt) ſubtriplus fieri angulo dato *BAC*, quoniã igitur, vt demonſtratum eſt inæqualium circulorum æquales anguli ſimiles auferunt peripherias, & ſunt in circulo ſimilia triangula *BFK*, *CKH*, etenĩ anguli *CBF*, *CHF* eidem inſiſtunt peripheriæ, & qui ad vertices K æquantur, quare



reliqui *BFH*, *BCH* æquales, quia ſuper eadem inſiſtunt peripheria *BH*, & explent duos rectos, & vera quantitas anguli *BFH* eſt angulus *BDI* in ſua peripheria *BI* deſignatus, quare ſimiles in diuerſis circulis fiunt *BG*, *BH* peripherię, ſicut *BH*, & *BI* inter ſe ſimiles, hæc vt portio *BC*, ſiue anguli *BAC*, illa vt portio ſemicirculi ſui *BHC*, angulus namque *BFH*, & ſi non pertingat ad alterius circuli arcum, quum æqualis ſit oſtenſus alteri *BCH* pertingenti, duas facit ſimiles *BH*, *BI* portiones, ergo quæ pars fuerit *BG* ſemicirculi *BGD*, eadem fiet *BI* pars ſuę portionis aſſumptæ *BC*, hoc eſt comparatione relata ad angulos in centro, angulus *BAG*, quę pars erit duorum rectorum, aut diuidendo, quæ pars *BG* erit relata ad *GD*, ſiue angulus *BAG* ad angulum

GAD, eadem ratio erit anguli *BAI* ad angulum *IAC* ſed erat angulus *BAG* triens duorum rectorum, ergo & angulus *BAI* triens totius anguli *BAC*, quare ſectus erit arcus ſiue angulus trifariam, & quidem faciliter per planum, quod erat faciendum.

ADNOTATIO PRIMA.

NOn eſt tam propria triſectionis effectio hæc quin pro omnibus demonſtrari queat, quod infra facturi erimus vniuerſaliter, at quia deſumpſimus *BG* ſextam circuli partem, & idem licebit pro quinta, ac quin decima, quę hactenus Geometria ſuppeditare nouit, & ex demonſtratis ſequitur in eadem ratione ſe habere *GI* ad *DC*, vt *BI* ad *IC*, ſeu *BG* ad *GD*, nam vt totus arcus *BC* ad totum *BCD* arcum, ita ablatum *BG* ad ablatum *BI*, ergo & reliquus *DC* ad reliquum *BI*.

ADNOTATIO SECVNDA.

HActenus facultas minimè nouerat ad alia imparium loca, vt innuimus extendere effectiones, ars vero ex analyſi Vietęa inducta pulcherrimè quippe fuerat, at inſufficiens, vt à genere improprio ortum ducens, vt igitur aliquod, & facilius ſpecimen oſtenderet Author ingenuè pronunciauerat cap. 5 in reſponſo ad Adrianum nō eadem facilitate quà componũtur problemata poſſe reſolui, neq; enim opus, quod geometricè cōponitur, per eadem Geometricè reſoluitur, ſcilicet.

,, *Ad da-*

„ *Ad datam primam, & ſecundam conſtruo ſeriem continuè proportionalium* εἰς ἄπειρον, *at non ideò ex data prima, & quarta, vel ſexta exhibeo geometricè ſecundam.*

Ponatur circuli portio, cuius corda ſit *D*, & ea quę ex centro ſit X, ſint igitur in ſerie quatuor proportionalium X data prima, & *D* differentia, qua triplum ſecundæ ſuperat quartam, oporteat inuenire ſecundam.

Peritus logiſta hàc inquirit arte, ponendo magnitudinem ignotam eſſe *A*, quare proportionales quatuor erunt

$$\overset{1}{X}. \quad \overset{2}{A}. \quad \overset{3}{\frac{AQ}{X}} \quad \overset{4}{\frac{AC}{XQ}}$$

& ex iis, quæ, ponuntur triplum ſecundæ fit *A3*, multatum quarta, fiet æquale *D* dato, vnde æqualitas hæc erit.

$$3A - \frac{AC}{XQ} = D$$

, quod homogeneum dicitur comparationis, & ſi omnia ducantur in *XQ* ad expurgandas fractiones, æquatio noua erit

$$XQ \text{ in } A3 - AC = XQ \text{ in } D$$

& quia in opere diuiſionis, ſeu multiplicationis vnitas nihil immutat, erit $3A - AC = D$

& vſque huc Analyſta ſuum deducit ex arte epilogiſmũ indicans, quod ad eruendum latus *A*, neceſſe haberi, vt arcus ſiue angulus trifariã ſecetur, quod à nemine hactenus

nus per prĩcipia germana facultati nouimus gestum, & tunc geometriæ occurrerant per aliquod mechanicum, & arithmetricæ, per industriosam diuisionem homogenei comparationis, addendo solida, verùm sua laude inuentio eiusmodi (antiquioribus ignota) fraudari non licet, sed ad accuratè quæsitum assequendum prorsus digrediens. Porrò in serie sex linearum continuè proportionalium si daretur prima, & recta æquali secundæ quintupla, plus sexta minus quintuplo quartæ ad exhibendam secundam, similiter pro secunda poneretur *A* ignotum, & fieret logistica series,

$$\overset{1}{X.}\quad \overset{2}{A.}\quad \overset{3}{\frac{AQ}{X}}\quad \overset{4}{\frac{AC}{XQ}}\quad \overset{5}{\frac{AQQ}{XC}}\quad \overset{6}{\frac{AQC}{XQQ}}$$

& æquatio ex iis, quæ proponuntur fieret,

$$5A - \frac{AC5}{XQ} + \frac{AQC}{XQQ} = D$$

solido, & expurgatis fractionibus, omnia scilicet ducta in *XQQ* fieret *XQQ* in $A5 - XQ$ in $AC5 + AQC = XQQ$ in D solidũ, & quia vnitas nihil immutat sublata, noua erit ęquatio $5N - 5C + 1QQ = D$ solido sic vlterius si series fieret octo linearũ in continua analogia ex data prima, & recta qua secundæ septuplum, plus septuplo sextę superat quartam quater decies, vna cum octaua ad exhibendam secundam, esset series logistica.

1	2	3	4	5	6	7	8
X.	A.	$\frac{AQ.}{X}$	$\frac{AC.}{XQ}$	$\frac{AQQ.}{XC}$	$\frac{AQC.}{XQQ}$	$\frac{ACC.}{XQC}$	$\frac{AQQC.}{XCC}$

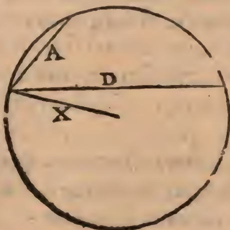
& ex ijs, quæ proponuntur æqualitas esset,

$$7A - \frac{AC}{XQ} + \frac{AQC\,7}{XQQ} - \frac{AQQC}{XCC}$$ æqualia D solido,

& si expurgentur à fractionibus æqualitas erit *XCC* in *A*7 -- *XQQ* in *AC* 14. + *XQ* in *AQC*7 -- *AQQC* = *XCC* in *D* & vbique expuncta vnitate ordinata æqualitas erit

7*N* -- 14 *C* + 7*QC* -- 1 QQC = *D* solido,

magnitudo exprimens ipsã cordã *D*, cuius *IN* latus sit heptagoni, at in sua congrua serie latus figurarũ imparium, attamen illa explicare nequit, sed sub istis algebricis inuolucris indicare, hæc induxerat ibidem doctissimus author, vt à faciliori ostenderet qua vsus fuerat methodo ad explicationem Adriani problematis, & erat prorogando præmissum thema, vt si proponeretur series quadraginta sex linearum proportionalium, & data harum prima, & recta ęquali secundę multiplici per numerum 45.



minus

	45
minus quarta multiplici per numerum	3795
plus ſexta multiplici per numerum	95634
minus octaua multiplici per numerum	1138500
plus decima multiplici per numerum	7811375
minus duodecima multiplici p numerũ	34512075
plus decima quarta multip. per numerũ	105306075
minus decima ſexta multip. per numerũ	232676280
plus decima octaua multip. per numerũ	384942375
minus viceſima multip. per numerum	488494125
plus viceſima ſecũda multip. per numerũ	483841800
minus viceſima quarta mult.per numerũ	378658800
plus viceſima ſexta multip. per numerũ	236030652
minus viceſima octaua mult. per numerũ	117679100
plus triceſima multiplici per numerum	46955700
minus triceſima ſecunda per numerum	14945040
plus triceſima quarta multip; per numeruũ	3764565
minus triceſima ſexta multip.per numerum	740259
plus triceſima octaua multip. per numerum	111150
minus quadraceſima multip. per numerum	12300
plus quadraceſima ſecunda per numerum	945
minus quadraceſima quarta per numerum	45
plus quadtaceſima ſexta	

„ *Inuenire ſecundam*

„ *Vbi author ſubiungit,* Quid igitur quærit á Geometris Adrianus Romanus?

„ *Datum angulum trifariam ſecare.*

„ *Datum angulum quintufariam ſecare.*

Et quid ab Analyſtis?

„ *Datum*

,, *Datum solidum sub latere, & dato coefficiente plano*
,, *adfectum multa cubi resoluere.*
,, *Datum quadratocubum adfectum adiunctione quidem*
,, *plano solidi, sub latere, & dato coefficiente planoplano,*
,, *multa verò plano solidi sub cubo, & dato coefficiente*
,, *plano resoluere.*

Quare quærenti Adriano licet siue in Geometricis, siue in Arithmeticis satisfacere, *Adscito nempè eo quod ad supplementum Geometriæ inducendum fuit postulato*, hactenus eximius author, qui mira prius dexteritate non ritè propositum emendauit, ac resolutum euulgauit, nihilominus quum hæreret principio minimè facultate ipsa probato, deinceps accuratum penitus adesse cognoscent studiosi, exposituri generalem formam anguli diuidendi in partes imperatas, & impares, & ex consequenti medias proportionales, quæ in serie Analogica sunt opportunæ.

ADNOTATIO TERTIA.

OMnes quippe eruditi, qui de eiusmodi doctrinis verba fecerunt, artem secandi angulos per loca imparia tàm difficilem censuere, vt nulla spes ab vllo concepta exoriretur, attamen, minimè à labore destiterant, quin Analysim Algebristarum promouerent, id quam maximè authores Brittanniçę in opere tam vasto præstitisse licet inspicere, at numquam pronunciauerat quispiam effectionis im-

poſſibilitatem, vt etiam ex eadem inſula author, (vt alios miſſos faciamus) in opuſculo, cui Arithmetices clauis indiderat per ſequentia verba teſtatus fuit.

„ *20 de angulorum, ſiue peripheriarum biſectione, triſe-*
„ *ctione, quintuſectione pauca etiam ad analyſtices præ-*
„ *ſtantiam, vſumq; admirandum oſtendendum apponam.*
„ *Geometricam quidem praxim adhuc inuentam non ha-*
„ *bent: ſicut nec meſolabium inuentum eſt, &c.*

Alacres quippe Analyſtarum ſtudioſi hactenus incedebant, quaſi ſibi primas deberentur, quia ex earum laborioſa artis cultura plurimi fructus excerpere viderentur, & geometria quodam expoſita apparebat ludibrio, at ipſa tandem excitata accuratè, & facillimè ſuas adimplet lacunas. Pugnauit acerrimè aduerſus eam magni ſanè ingenij vir Kepplerus, qui pluries ſectionem anguli trifariam negauerat, at quia cum eo paulo infra erit noua occaſio velitandi, nihil modò reſponſi damus.

PROBL. DECIMVM NONVM

Angulum, ſiue Arcum quemlibet planum in data ratione ſecare.

SIT angulus *BAC* ſecandus ea ratione, vt ſe habet BG ad *BD*, duarum ſcilicet partium inter ſe duorum rectorum: compleatur circulus circa diametrum iunctę cordæ *BC*, ſit *BHC*F, & in eo quadrans ſumatur

BF,

BF, deinde per datum *G* punctum ex C agatur linea *CGH*, & habebitur in ſecundo circulo punctum H, ex quo si ducatur linea *FH* in priore circ-ſignabitur punctum *I*, quo aio effici imperatum; nimirum ita ſe habebit pars *BI* reſecta ad reliquam *IC*, veluti *BG* ad *GD*: ducantur per *F* punctum duæ lineæ *BL*, *CN*, quę æquales erunt, ex



paritate arcus, quibus ſunt ſubtenſę, etenim *BF*, *CF* quadrantes ſunt ex ipſo opere, ideò anguli ad *B*, & *C* vterque ſemirecti, & quadrantes ſunt etiam *BN*, *CL*, oppositę ſcilicet peripbariæ ad angulos ſemirectos, & communis addita *LN*, æquales erunt *BNL*, *CLN*, ergo & ſubtenſę *LB*, *CN* ęquantur, quæ extra centrum ſecant ſeſe ad rectos angulos, quare ex pręoſtenſis similes fiunt portiones *BGC*, *LMN* in eodem circulo ſumptę, & in diuersis, ducta ſcilicet *HFM*, ergo ea erit ratio *BG* ad *GD*, quæ *BH* ad *HC*, & eadem *BH* ad *HC*, quę *BI* ad *IC*, ideo ex ęquali, vt *BG* ad *GD*, ita *BI* ad *IC*: ſecta igitur erit portiò arcus *BC* in *I* puncto in ratione data *BG* ad *GD*, & relatæ ad angulos in centro, quę ratio erat anguli dati *BA*G ad G*AD*, eadem facta erit anguli *BAI* portionis datæ, ad reliquum angulum *IAC* eiuſdē

portionis, quod erat imperatum, & sequitur ita se habere *IG* ad *DC* vt supra ostendimus.

ADNOTATIO.

MAnifestum igitur relinquetur Pappi rescriptum, quod sectionem anguli plani vltra trisectionem, quam ad solidi genus pertinere voluerat, verum non esse, spectare scilicet ad lineare genus si proponeretur secari in ratione analogica; omnes omninò ex vno loco suam originem trahunt, nempè à genere primario planorum, & si me non lateat illud Poetæ.

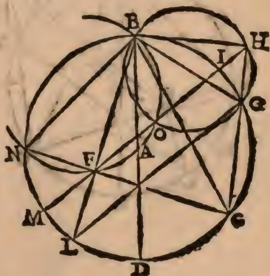
„ *Nec veniam antiquis, sed honorem, ac præmia posci.* veritati nihilominus tenemur magis, quam authoritati deferre, & quidem quos in facultatem defectus reiecerant, in cultores potius fuerant referendi, qui suas minimè curarunt experiri vires, & ne alicui scrupulum surrepat, quę hucusque sunt demõstrata ad ãgulos duobus rectis minores fuisse coarctata, generalia q; non esse præcepta, scrupulus statim euanescet, si cuiusuis anguli dati plani per bisectioné quantitas reducatur ad minorem duobus rectis, & operatione peracta, per quoti duplicationem accurata pars resultabit, hæc ideò addidimus nè in scirpum nodo locus fieret.

PRO-

PROBLEMA VICESIMVM.

Tribus datis angulis, seu arcubus, quartum in analogia reperire.

SInt angulis datis, arcus respondentes *BG*, *GD*, *BI* & oporteat quartum assignare in proportione. Compleatur circulus *BGCM*, in eoque sit *N* punctum quadrantis, & ductis B*N*, *BG* diametri sint se secantium circulorum in *O*, ex quo, & puncto *I* dato transeat *HIOM* linea, secabitur hoc casu rursus peripheria circa *BN* in *F*; deinde ex *H* per *G* etiam datum puuctum agatur H*C*. Dico hoc *C* puncto effici quæsitum. Agantur B*C*, *B*H, & quia recti sunt ad *F* & *H* anguli, si circa diametrum *BC* scriberetur circulus, vtique transiret per quatuor *BHCF* puncta, iunctaque *B*F*L*, duę *CN*,*BL* nec non *CF*, *BF* erunt æquales, & ideò *CN* per *F* transit, ducatur *LG*, & quia



angu-

angulus *LBC*,tàm *LGC*,quàm *FBC* æquatur, vtpotè ſuper eandem peripheriam inſiſtentes, erunt *FHF* , *LGC* internus externo ęquales,ergo & *HM*,*GL* ęquidiſtãtes, & *LM* , *GI* arcus æquales; & quia extra centrum ſe committunt in *F* ad æquales angulos *CN* , *BL* , erit partium inęqualium ſimilitudo , nimirum *LM* ad *LN* , ita *BI* ad *BC* , & ſupra oſtenſum fuit *LN* , & *DC* fieri æquales ex cõmuni *LD* ſubductione ab æqualibus *D*N, *C*L quadrãtibus; ideò erunt ęquales *BN* , *CL* , quocirca *HM* tranſiens per *F* ſecat in *O* peripheri,quod eſſe quadrantis punctum oſtendetur ; itaq; proportio erit *LM* ad *LN* , hoc eſt *IG* , ad *DC* , ob terminorum ęqualitatem : ergo vt IG ad D*C* ita *BI* ad B*C* ſimilis ſimili in eodem circulo , & permutando ,componendo , & per conuerſionem rationis erit *BG* ad *BI* , vt *BD* ad *BC* , & iterum permutando , ac diuidendo fiet *BG* ad *GD* , ita *BI* ad *IC*. Quare trium datorum arcuum *BG* , *GD* , *BI* quartum

repe-

reperimus in analogia, ipſum ſcilicet BC, quod erat faciendum.

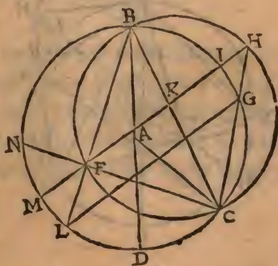
A D N O T A T I O.

ET cum in quadrilatero *BFCH* ad *F*, & *H* recti erant, ductaque ſit HF ſecatur angulus BHG bifariam ob quadrantes BF, *CF* quibus ſemiſſes inſiſtunt, quare in circulo BOG*H* duo arcus quadrantes fiunt BO, & OG, quod diximus in propoſitione oſtenſuri.

PROBL. VICESIMVM PRIMVM

Data ratione duorum arcuum, in eadem opus ſit ſecare ſemicirculi peripheriam, hoc eſt ſumma duorum rectorum, in data ratione anguli ad angulum diſpeſcere.

COnuerſum erit præcedentis: ſit igitur ratio arcus BI ad IC, & ſecanda ſit in hac ratione ſemicirculi peripheria BGD: ducatur corda BC, circa quã ſcribatur circulus BF*C*H, cuius quadrans *BF*, & agatur *FI* producta ex vtraque parte ſecabitur ſecundus circulus in *H* puncto, ad quod ex alio puncto *C* iuncta *CG*, rurſus prior circulus ſecabitur in *G*,



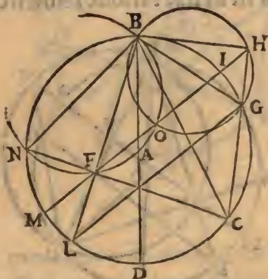
& erit

& erit quod quæritur, ſitque *BI* ad *IC*, vt *BG* ad *GD* quod quidem vt in proximè præmiſſo oſtendi poterit, nec eadem rurſus repetere oportet.

PROBL. VICESIVMSECVNDVM.

Dato in peripheria ſemicirculi puncto, oporteat vltra citraq; illud alia duo ſignare, vt ſemicirculi partes ſe habent, ita portiones à communi extremo diametri terminatæ puncto remotiore, ſint in eadem analogia.

IN peripheria ſemicirculi *BGD* datum ſit *G* punctum, & in ea ſint duo alia ſignanda vt (v gratia) *I*, & *C* citra, & vltra G, vt ea ſit ratio *BG* ad *GD*, quæ *BI* ad *IC*, ſumatur *BN* circuli quadrans, iungantur cordæ *BN*,*BG*, circa quas duo eant circuli ſeſecantes in *O* pucto, deinde inter *O*,& *N* in peripheria ſumatur punctum ad libitum vt *F*, ex quo per idem *O* punctum ducatur linea, quæ etiam dabit alia puncta *M*, *IH*, poſtea ex puncto *H*, ſi per *G* agatur *HGC*, erit abſolutum quæſitum, nimirum duo puncta *I*, & *C* citra, & vltra



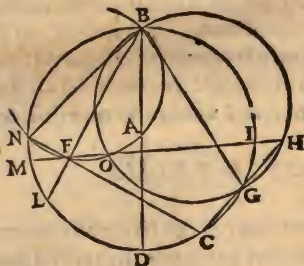
& vltra datum G ſignata erunt, & dico *BI* ad *IC* eandem eſſe rationem veluti *B*G ad G*D*. Agantur per *F* lineę *BFL*, *CFN* ſe ſecabunt ad angulos rectos in *F* ex vi ſemicirculi, quare *B*F, *FC*, nec non *NF*, *FL* erunt inter ſe ęquales, & arcus *BN*, *CL* ęquales ſcilicet quadrantes, quibus addita communis portio *LN* æquales pariter *BNL*, *CLN*, quod etiam ex ęqualitate cordarum conſtat, at *DN*, *CL* ęquales ſunt, quia quadrantes eiuſdem circuli, à quibus ſi auferri intelligatur communis peripheria *DL* erunt relictę portiones *CD*, *LN* ęquales, & ſi agatur *LG* vti eſt in 16 problemate oſtenſum, fiet vt *BI* ad *IC*, ita in ſimili *LM* ad *LN* ſiue IG ad *DC* (nam *IG* ęqualis ſit *LM*, & *LN* ipſi *DC*) quare permutando, componendo, & per conuerſionem fiet ratio *B*G ad *BI* vt *BCD* ad *BC*, & iterum permutando *BG* ad *BD*, ſic *BI* ad *BC*, ac diuidendo vt *BG* ad *GD*, ita *BI* ad *IC*, duo ergo puncta inuenta ſunt *I*, & *C* efficientia quæſitũ, &c.

ADNOTATIO PRIMA.

Diximus *F* punctum inter *N*, & *O* conſiſti oportere, nam ſi in *N* fuiſſet per *O*, pertingeret ad punctum *G* præcisè, ſi verò in *O* producta tangeret peripheriam *BHGO*, & alibi inutiliter ad quæ ſitum, adeò vt oportune debeat in latitudine arcus *NO* ſuſcipi *F* punctum.

ADNOTATIO SECVNDA.

Contingere quidem posset, ex situ dati *G* puncti, & *F* assumpti, quod punctum *H* in semicirculo *BHG* excurreret, vt circulus *BGD* tangeretur à producta linea *HG*, ita vt præmissa constructio prorsus elusoria experiretur ad quæsitum exhibendum, igitur ad hoc declinandum, ducatur linea, siue corda *BG*, circa quam circulus eat *BHGO*, & inter *D*, & *G* (non quidem in ipsis præcisè punctis) sit punctum *C*, & ducta *CGH* in alio circulo *BOG* cadet, vt in puncto *H*, ex quo per datum punctum *O* acta linea, secabitur in *F* tertius circulus *BNFO*, & per punctum idē *F* conductæ lineæ *BFL*, *CFN* componentur ad angulos rectos ex punctis datis B, & *N*, quare similes fient portiones B*IC*, & *LMN*, æquales verò *LN*, & *DC*, vt æquales *LM*, *IG*, igitur fiet *IG* ad *DC*, vt B*I* ad B*C*, siue *BG* ad *GD*, reliqua vt supra abundè ostensa repetere non oporteat.

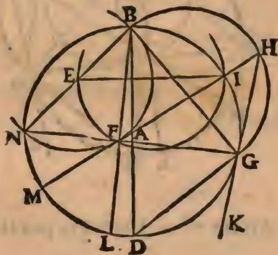


PRO-

PROBL. VICESIMVMTERT.

Dato arcu, siue angulo inter eum, & semicirculi peripheriam medium in analogia reperire.

SIT semicirculi peripheria *BID*, & in ea data portio arcus (siue angulus) B*I*, & oporteat arcum reperire, qui medio loco stet in analogia inter semicirculum, & partem *BI*, quod erit inter duos rectos, & acutum angulum determinare mediũ. Perficiatur circulus *BIDN* eiusq; quadrans sit *BN*, ac corda in *E* secta bifariam, iungatur *EI*, & scribãtur circuli duo circa diametros *BG*, & *EI* sesecantes in *F*, aganturq; *BFL*, *GFN*. Dico punctum *G* esse quæsitum, scilicet eam



esse rationem *BI* ad *BG*, vt *BG* ad *BD* semicirculi peripheriam. Circa ductã *BG* cordam circulus fiat *BHGF*, ducaturque *FI*, hæc porrecta ex vtraque parte erunt ad peripherias puncta *M*, *H* data; deinde iungantur lineę *BH*, *DG*, *HG*, duo fient triangula BDG, BGH æquiangula, quum enim in circulo duæ lineæ BL, GN æquales sint se non in centro ad rectos angulos secantes in *F*,

(iam quadrantes ſunt *BN,ND*,& *GL*) ſimiles euadunt portiones reſciſſę *BG,LN*,& ducta *IM*,portiones ex aduerſo ſimiles fiunt, hoc eſt eadem ratio fiet *LM* ad *LN*, vt *BI* ad BG, & quia æquales oſtendimus GL, DN, vt erant quadrantes ſublata portione DL comuni, remanent GD,LN pares, ergo vt LM,ad LN, hoc eſt ad *DG*, ſiue *IG* ad GD (nam ſi iungeretur linea LG æquidiſtaret lineæ IM quod oſtensũ eſt ſupra) & æquales igitur fiunt IG, ML. Ideo vt BI ad BG, ita LM ad LN,ideſt IG ad GD, quare permutando vt BI ad *IG*, ita B*G* ad *GD*, & componendo,vt BI ad B*G*,ita B*G* ad BD. Igitur inter BI portionem, & BD ſemicirculũ media conſtituta eſt in analogia portio B*G* quod erat faciendum.

ADNOTATIO.

EX eo quod inæqualium circulorum ſimiles ſint portiones *BH*, *BG* ſequitur anguli eiſdem inſiſtentes fieri æquales *BGH*, *BDG*, & quia in ſemicirculis ad *G*, & *H* (ducta non eſt *BH*) ſunt recti, etiam reliqui *GBH*, *GBD* æquantur, quare ſimilia fiunt triangula *DBG BGH*, id circò expeditior effectio erit ſi

NL po-

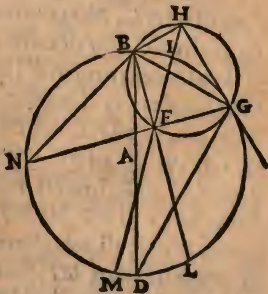
NL ponatur in *DG*, & quum in alterno ſegmento anguli *BGH*, *BDG* ſunt æquales, erit *HG* circulum tangens, & erit *G* quæſitum punctum.

PROBL. VICESIMVMQVART.

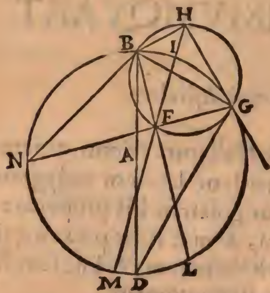
Enneagonum regulare Geometricè deſcribere.

IN ſequenti proximè, & ſi allaturi erimus generalem pro omnibus imparium laterum polygonis methodum, tamen lubet ſingularem hìc proponere, & propter illius elegantiam, & quia hanc praxim quibusdam conceſſeramus amicis, puram, & hùc remiſimus ſuam operis expectare firmitudinem.

Sit igitur circulus circa *A* centrum, & in eo ſextans *BG* expanſione ſcilicet ſemidiametri, & circa cordam illius alius ſit circulus *BHGF*, in quo rurſus ſextans aptetur *BH*, deinde accipiatur quadrans *B F* agatur linea *HF*, quæ protendatur in *M*, ſecta erit data peripheria in *I* puncto. Dico arcus *I*G fieri nona pars, & *BI* octodecupla totius circuli, hoc eſt ducta corda *IG* fieri



fieri latus enneagoni quæsiti. Agatur *HG* contingens in *G* circulum, & per punctum *F* binæ educantur lineæ *BL*, *GN* erunt abscissi quadrantes *BN*, *GL* ex similitudine duorum *GF*, *BF*,



iungantur deindè aliæ *BH*, *DG*, fient anguli *BGH*, *BDG* in portione coalterna à tangente æquales, & æquales sunt recti *BHG*, *BGD*, ergo & reliqui pares, ideò similia fiunt triangula, & arcus similes æqualibus, quę subsũt angulis, quare vt *DG* ad *BG*, ita *HG* ad *HB*, & in vno eodemque circulo, vt *LN* ad *BG*, ita *GI* ad *IB*, nam æquales sunt *GD*, & *NL*, quia quadrantibus *GL*, *ND* communis apposita est portio *DL*, & in circulo æquales *NG*, *BL*, lesecant ad angulos rectos extra centrum in *F*, quare *NL*, *BG* portiones euadunt similes, vt aliæ etiam interceptæ, ideò erit *NL* ad *MN*, ita *BG* ad *GI*, hoc est per inuersam rationem *LN* ad *LM*, vt *BG* ad *BI*, ergo erit vt *LN*, siue *DG* ad *BG*, ita *LN* ad *ML*, hoc est *BG* ad *BI*, quare componendo fiet vt *BGD* ad *BG*, ita *BG* ad *BI*, media igitur erit *BG* inter semicirculi peripheriam, & portionem *BI*, ergo *BI* erit tertia pars *BG*, sicut *BG* triens est *BD* semicirculi peripheriæ, & diuidendo *GI* fit dupla ipsius *BI*, vt *DG* dupla erat *BG*, etenim sestans assumpta fuit totius

circuli

circuli, igitur B*I* nona pars cum ſit ſemiperipheriæ, eius dupla nempe G*I* nona fiet pars totius circuli, cuius poſtea B*I* decima, ac octaua pars fieri conſequenter patet, & habetur propoſitum.

ADNOTATIO.

NON igitur ſua legitima conſtructione caruerat enneagonus, quod non à multo tempore doctiſſimus Petrus Herigonius ad notas in tertium tomum conſtanter negat in ipſo tractatu, ſcilicet de muniendis arcibus, mihi fol. 340, 341, & quidem licebat aſſerere pro tunc ignotam fuiſſe effectionem, aut non exhibitam, verum quæcumque ignoramus valde ſumus prooliues in ipſam reiicere diſciplinam, vt vt minime ignoremus perfectionem ſenſim, & longo poſt tempore ſoleant vniuerſa recipere ſuam. Igitur non modo enneagoni, & omnium imparium polygonorum laterum Geometria habet, & faciliter exhibet, quod verò nos fruſtra ſępe conemur in aſſequtione queſiti, eſt quia à veſtigiis declinamus naturæ rerum, veluti author idem in Algebræ ſupplemento ad quæſtionem quintam propoſitionis 34. mihi pagina 53, vbi ex artis analyſeos hypoteſi conatur ſeptufariam ſecare circuli peripheriam, & in hanc incidens æquationem, ſcilicet.

7 B*CC* ⩵ A *CC*-- 7BQ in AQQ † 14 BQQ in AQ aſſerit (nec fallit) latus huius compoſiti Algebrici eſſe heptagoni in circulo inſcriptibilis, cuius verba ibidem ſunt.

In hac

„ *In hac æquatione linea radicis A est latus heptagoni in*
„ *circulo inscripti, vnde liquet problema hoc non esse planũ,*
„ *neque hanc æquationem reduci posse ad quadraticam,*

Sed hoc artificiosè compositum geometriæ nihil officit plura ope intellectus comminisci nouimus, quæ natura nõ profert, quis etenim vltra cubum dixerit concipi, & à parte rei haberi ex illis potestatibus, quę Analystę induxerant? si igitur a binomia radice ars confinxerat solidũ illud, quod ipsa postea nequit resoluere, cur petere á genere planorum, quod non composuit? latus deinde, & heptagoni, & in qualibet alia multitudine figura laterum imparium per sua propriè construit, & ostendit, quod in sequenti erit.

PROBL. VICESIMVM QVINT.

Polygonum regularem quotcumque laterum imparium Geometricè describere.

TAM generalis est detecta à nobis methodus, vt omnibus parium, siue imparium polygonis cõpetat, & ab vna eademq; scaturigine pendeant vniuersi, ponamus in exemplum heptagoni, ac vndecagoni descriptionem.

Primùm imperetur describi heptagonum, exponatur circulus quicumque, cuius sit *K* centrum, & acta diameter *AF*, ad amplitudinem circini arbitrariam (dummodo circunductus non superent designandæ partes

partes semicirculum) pro heptagono accipiantur partes tres, & semissis vnius, vt *AB*, *BC*, *CD* æquales, & *DE* vnius semissis, deindè connexa *AE*, quæ neque debet æquare diametrum, aut illud superare, vt diximus, completoque circulo circa eādem *AE*, vt diameter, notetur signū quadrantis puncto *L*, ex quo per primæ partis punctum agatur linea *LBG*, habebitur *G* punctum in secundo circulo: Ideò conducta alia EG, primus circulus secabitur nouo puncto *H*. Dico Arcum *AH* esse septimam partem suæ integræ peripheriæ, & ducta corda *AH* latus præcisè heptagoni inscripti. Etenim ex demonstratis factæ sunt similes tres peripheriæ in duobus circulis se secantibus *AH*, *AG*, & *AG*, *AB*, & in vno eodemque circulo similes habentur, *AH* relata ad *AF*, vt *AB* relata ad *AE*, at *AB* fit vt 2 ad *AE* 7, ergo & *AH* relata ad *AF* erit vt 2 ad 7, & duplato consequente erit *AH* 2 ad totam circuli peripheriam comparata, vt 1 ad 14, hoc est diuidendo *AH* septima fiet circuli totius pars, quæ circumlata, accuratè præstabit regularem heptagonum. Ideò factum quod oportuit.



ADNOTATIO PRIMA.

SI circumferentia exposita, in qua formula constructionis est designata, sit propositi circuli ad inscribendum heptagonum, iam res confecta relinquitur, at si diuersus sit circulus, tum analoga erit suscipienda portio, quod per æquales in centro angulos nullo absoluetur negocio, sit illa pars αβ, & heptagonus totus αβγδεζη, ductisque lineis, vt in schemate, factum erit αδε Isoscele triangulũ cuius ad basim angulorum vterque αδε, αεδ erit triplus, ad angulum verticis, quare vna est pars materialis constitutiua heptagonum, ab opposita sua peripheria limitata, vndè ante expletionem figurę inquisita obtineri non poterat anguli determinatio, & quidem vel saltem hisce initiatus doctrinis negare audebit nemo diuersi ordinis esse figura, & angulus; figura sanè altioris est cum spatium claudat, & mensuret, quod angulus non facit, & quia in serie figurarum rectilinearum prima est triangulum, ideò propinquiorem alijs, ipsi angulo, quare cum dixerint authores inquirendum fore triangulum, optimè censuerant, at illud assequi non poterant,



rant abſque eo, quod integra figura, cuius ipſe fuiſſet pars, non reperiretur, Clauius ſcriptor admodum accuratus ad calcem libri quarti elementorum hæc habuit,

„ *Si igitur inuenta fuerit ars; qua iſoſcelia triangula con-*
„ *ſtruantur habentia angulos ad baſim multiplices eorum,*
„ *qui ad vertices ſunt angulorum, quemadmodum Eucli-*
„ *des Iſoſceles fabricauit, habens vtrumque angulorum ad*
„ *baſim duplum anguli ad verticem; facilè in circulo de-*
„ *ſcriberentur figuræ omnes laterum imparium: & ſi arcus*
„ *earum diuidantur biſariam, inſcriberentur quoque*
„ *omnes figuræ parium laterum poſt quadratum, atque*
„ *adeò circumferentia cuiuslibet circuli in quotlibet æqua-*
„ *les partes Geometricè diuidetur, quæ res ſummam aſtro-*
„ *nomis afferret vtilitatem; verum hæc ars adhuc ignota*
„ *extitit, &c.*

Huc vſque Clauius cum pluribus, at ignoſcat quæſo venerabilis antiquitas, Euclides poſt inuentionem trianguli iſoſcelis, qui angulos ſuper baſim in dupla ratione ad verticalem haberet, ad effingendum pentagonum, non dixerat neceſſitatem pro alijs figuris imparium laterum, vt haberentur eiusmodi triangula (at ſecundum quandam analogiam authores deinceps vnus poſt alium aſſeruere) etenim homogeneorum refragante lege; ſcilicet oportere congenea comparari, quod in qualibet re ipſa docet natura, at philoſophi ſymbola, & aſymbola communicare nequeunt, hęc ſanè contemplatio nobis viam aperuit, vt ad diuiſionem arcus haberemus recurſum.

N 2 ADNO-

ADNOTATIO SECVNDA.

VNica, & Generalis naturæ methodus expoſita eſt omnibus polygonis competens, & tàm facilis, vt amplius optari nequeat; igitur canonem hìc adnotare præſtat, quò ad inquiſitam figuram citò ducamur, cuius ordo ſic ſe habet.

Prima omnium figura eſt Iſopleurum pro quo erit in circumferentia expoſiti circuli ſumenda pro amplitudine libera, dũmodo ſemicirculũ non attingat pars

1 $\frac{1}{2}$ pro quadrato; ſumendæ erunt partes binæ;

2 $\frac{1}{2}$ pro pentagono

3 pro hexagono

3 $\frac{1}{2}$ pro heptagono

4 pro octagono

4 $\frac{1}{2}$ pro enneagono

5 pro decagono

5 $\frac{1}{2}$ pro vndecagono, & ſic in infinitũ erit in reliquis progreſſus, vt pro numero ãgulorũ inquiſitę figurę

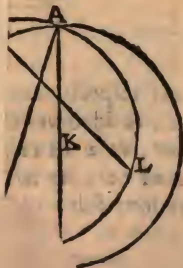
tot

tot ſemipartes in circuli peripheria ſumantur , vt pro polygono laterum 45 , vt requirebat Adriani problema , partes ſuſcipiantur (in tàm ampla peripheria , vt non attingant diametrum) 22 cum ſemiſſe vnius ,

, quam hactenus
ſſequetur , & ſic
la iſoſcelia exur-
ngulos ad baſim
itur ad angulum
ndecagonum de-

s centrum K dia-
tio ſumptam (dū-
attingat) accipi-

nero angulorum



ſupte partis *B* ducatur
linea *LB* , quę porre-

cta

ADNOTATIO SECVNDA.

VNica, & Generalis naturæ methodus exposita est omnibus polygonis competens, & tàm facilis, vt ampli

adnotare præst

ducamur, cuiu

Prima omi

erit in circumfer

plitudine libera,

1 $\frac{1}{2}$ pro q

2 $\frac{1}{2}$ pro p

3 pro h

3 $\frac{1}{2}$ pro h

4 pro o

4 $\frac{1}{2}$ pro e

5 pro d

5 $\frac{1}{2}$ p

quis progr umero ãgulorũ inquisitę figurę

tot

Ad 2. Adnot. Probl. 25. fol. 101.

tot ſemipartes in circuli peripheria ſumantur, vt pro polygono laterum 45, vt requirebat Adriani problema, partes ſuſcipiantur (in tàm ampla peripheria, vt non attingant diametrum) 22 cum ſemiſſe vnius, quare in Geometricis præciſionem, quam hactenus non recepit, hac arte modò facilè aſſequetur, & ſic ex ipſa rei natura deſumpta, triangula iſoſcelia exurgunt cum ipſis polygonis, habentia angulos ad baſim in illa ratione multipla, quæ requiritur ad angulum verticis, & hìc coronidis loco lubet vndecagonum deſcribere.

In aliquo expoſito circulo, cuius centrum K diameter *AF* ad circini aperturam arbitrio ſumptam (dũmodo circumducto diametrum non attingat) accipiantur æquales partes $5\frac{1}{2}$ pro numero angulorum ſcilicet ſiuè laterum inquirendi polygoni, & ſint *AB*, *BC*, *CD*, *DE*. *EF*, & ſemiſſis vnius *FG*, arcus totius *AG*, ſit eius nominis corda, circa quam eat circulus, in quo quadrãs *AL*, deindè ex puncto *L* in ſignum primę aſſũptę partis *B* ducatur linea *LB*, quę porre-

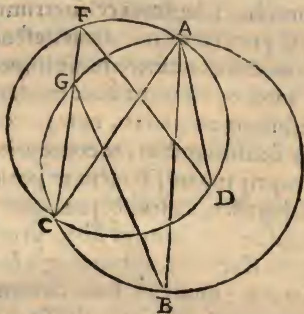


cta arcum ſecabit ſecundi circuli in puncto *I*, ad quod ex *G* termino ducatur linea *GI*, & ſecabitur prior circulus in *H*, nouo puncto. Dico portionem reſectam in dato circulo *AH* eſſe partem vndecuplam totius, & ſi in coæquali referatur, & lineæ agantur, erit expleta figura *ABCDEFGHIKL* vndecagona, & triangulum *AFG* ad baſim angulos habere in ratione multipla ad angulum verticis, vt *S* ad *I*, & quia conſtructio eſt generalis, diuerſa nõ erit effectio in omnibus alijs, demonſtratioque iam ex alijs ſupra habetur eadem, nam ſimiles ſũt portiones ĩ circulis diuerſis *AH*, *AI*, & pariter *AI*, *AB*, & in vno, eodẽque circulo ſimiles fiunt *AH* reſpectu ſemicirculi, vt *AB* reſpectu portionis *AG*, & ideò vt *AB* ad *AG* eſt 2. ad 11, ſic *AH* ad *AF*, vt 2 ad 11; quare duplato conſequente erit vt 2 ad 22, ita *AH* ad circulum integrum, ſcilicet in ratione ſub vndecupla, quod erat faciendum.

ADNO-

ADNOTATIO TERTIA.

NON tantum hac methodo regularium polygonorum inueniuntur latera, verum etiam portiones similes inæqualium circulorum habentur, quia in circulo ABC, si ducta fuerit corda quæcumque AC, quę alterius circuli diameter euadat, & assumpto *D* quadrantis puncto in semicirculo, qui intra datum colligitur, ducta quęlibet linea *DF*, & iungendo puncta FC secabitur datus circulus prior in *G*. Dico quod similes fiunt portiones AF, AG inęqualium circulorum, & facilè patet, nam iunctis BG, *D*A, erunt anguli ABG, ACG, æquales, quia eidem insistunt peripheriæ, pariter, & anguli ADF, ACF æquantur; eadem ratione ergo æquales euadunt diuersorum circulorum anguli ABG, ACF; Ideòque similes portiones sunt AG, AF, & aliquota, vel aliquanta sit AG, eadem in suo circulo fiet AF, quod fuit intentum.



ADNOTATIO QVARTA.

NObilitas amplitudinis eiusmodi effectionis postulare videtur, vt in silentium non relinquamus quicquid de polygonis locorum imparium senserint authores, & ne catalogus texatur, vnum pro omnibus selegimus celeberrimum nempè Kepplerum, qui præ ceteris mordicus defenderat heptagoni descriptionem ex numero fuisse impossibilium, & adeò constanter opinionem hanc tenuerat, vt prorsus è genere scibilium auulserat, nempè consequenter suis confictis definitionibus, ac conceptionibus, ea protulisse ex proprij ingenij feracitate potius, quam rei naturam indagasset, & si alibi præcipuè, & ex proposito in volumine harmonices libro primo capitulis 45, & 46 patet studuerit, aptari magis suis Idæis, quam realitati naturæ, quare ad hanc deuenerat sententiam, quod heptagoni descriptio fuisset ex inscibilibus, quia non præcesserat effingendi possibilitas, ideò pro dignitate quæstionis requiritur hìc non nulla eius verba excribi, quæ locis citatis habentur mihi pag. 38.

„ *Concludimus igitur analyses istas cossicas alienas esse à*
„ *præsenti contemplatione, nec vllum constituere gradum*
„ *scientiæ, cum ijs comparabilem, quos explicauimus in*
„ *superioribus.*
„ *Illud autem sunt obiter monendi metaphysici, occa-*
„ *sione huius cossæ, considerent, si quid hinc transumere*
„ *possint ad illius axiomatis explicationem, cum non en-*
„ *tis, nullæ dicuntur esse conditiones, nullæ proprietates,*

nam

„ *nam hìc quidem verſamur nos in entibus ſcientialibus,*
„ *& rectè pronunciamus, quod latus ſeptanguli ſit ex non*
„ *entibus, puta ſcientialibus, quum enim ſit impoſſibilis*
„ *eius formalis deſcriptio, neque igitur ſciri poteſt à mente*
„ *humana, cum ſcientiæ impoſſibilitatem præcedat ipſa de-*
„ *ſcriptionis poſſibilitas, neque à mente omniſcia actu ſim-*
„ *plici æterno, quia ſua natura ex inſcibilibus eſt, & ta-*
„ *men huius non entis ſcientialis ſunt aliquæ proprietates*
„ *ſcientiales, tanquam entia conditionalia, ſi enim eſſet*
„ *ſeptangulum deſcriptum circulo, laterum eius proportio*
„ *tales haberet adfectiones.*

Sic ibidem author, qui inſuper paulo antea fol. nimirum 34. L. C ſequentia dictauerat.

„ *Itaque nullum vnquam regulare ſeptãgulum à quoquam*
„ *conſtructum eſt ſciente, & volente, & ex propoſito*
„ *agente, ſed bene fortuitò conſtrui poſſet, & tamen igno-*
„ *rari neceſſe eſt, ſit nè conſtructum an non?*

Non nulla ſanè iſte author obiecerat Analyſtis vera, vt pote ad latera figurarum explicandum nihil conferre per gradus ſcalares æqualitatem indicari, quum actu præcisè neque geometricè, neque per approximationem arithmeticè exhiberi nequeant, at deinceps in ſequelam principiorum á ſe fabricatis, neque latus heptagoni deſcribi, & conſimilium figurarum, non iuxta naturæ theſim ſuſceperat, nam ex idęis ſibi conceptis ad poſſibilitatem, vel impoſſibilitatem rei naturaliter, fallaciter eſt argumentatus; idcircò deluſus deuenerat in minimè tolleranda abſurda, vt eiuſmodi deſcriptiones etiam fuerint im-

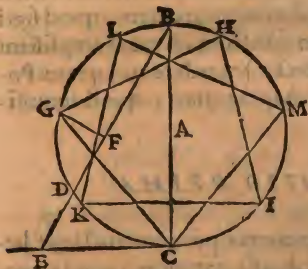
possibiles menti omnisciæ actu, nedum humanæ, & tamen fortasse vno potuerant fuisse contextu dictata (quod ex propinquitate loci argui licet) concesserat quidem casui, aut sorti, quod omniscię subduxerat menti, at viri alioquin doctissimi, ac præclarissimi patiantur manes in rectam à diuerticulo semitam reduci, nos ordine scientiæ à rebus quidem recipimus scientias, & tunc ad veram rerum pertingimus naturam, cum earum causas agnoscimus, effectus vnde incepimus producere, non quando nostras confictas idæas assequimur non abludere ab hypotesibus. Descriptio heptagoni geometricum est opus, vt imparium omnium aliorum polygonorum, & tanquam à subalternante si ab ea accipiat aliquid musica subalternata arithmeticæ, potius quam Geometriæ nihil in reliquis turbari potest, quare inquisita à Kepplero in magnitudinibus, vt musicæ cum suis idęis inseruiret inter arcana geometriæ non penetrauit, descriptio heptagoni possibilis adest, & tàm parabilis, vt mirum sit á nemine fuisse detecta, cæterum ingenium feracissimum Keppleri plurimi semper faciendum censuimus, & quippè ad mixtionem rerum naturalium cum mathesi valdè fuerat propensum, & amplius quam ad rigorem mathematum tolerandum, ideò aliquando meretur, vt cum censura admittantur quædam eius asserta.

PRO-

PROBL. VICESIMVMSEXT.

Heptagoni altera delineatio Analyſtis fortaſſe oportuna.

SIt circulus, cuius A centrum, BC diameter, & in C erigatur CE perpendicularis, eritque contingens circulum; ex altero verò extremo B diametri ſit inſcripta BD latus vnum trianguli ęquilateri, quod productum occurret ipſi *CE*, ſit in puncto *E* (neceſſitas concurſus euidentior fit, quàm vt probari ſit opus) deindè *BE* ſecetur æqualiter in *F*, ex quo puncto erigatur eidem normalis *FG*, ſecabitur circuli peripheria in *G* púcto, quo aio fieri queſitum, ſcilicet iũcta *CG*, fieri corda dupli arcus heptagoni, adeò vt diuiſa peripheria *CG* bifariã in K, erit *CK* arcus ſubſeptuplus totius criculi, ſeu ducta corda *CK* latus vnum quęſiti heptagoni: ſi igitur initio facto à puncto *C* ſepties circunducatur amplitudo ipſius *CG*, vt *GH*, *HI*, *I*K, K*L*, *LM*, *MC*, in ſecunda circulatione regredietur ad idem *C* punctum, & quia ex æqualibus ſubtenſis, etiam an-



guli, quos ſuſtinent eſſe æquales manifeſtum eſt, quare peripheria, quę debetur angulo *GCM*, hoc eſt angulo ad *C*, comprehenſa eſt

	duabus rectis	*GH*, *LM* dempto	arcu *HL*
ad *I*,	duabus	*HG*, K*L*	arcu *LG*
ad *M*,	duabus	*L*K, *CG*	arcn *G*K
ad *H*,	duabus	*GC*, *IK*	arcu *KC*
ad *L*,	duabus	K*I*, *MC*	arcu *CI*
ad *G*,	duabus	*CM*, *HI*	arcu *IM*
ad *K*,	duabus	*IH*, *LM*	arcu *MK*,

& quia omnes arcus ſublati per ſuas portiones *HL*, *LG*, *G*K, K*C*, *CI*, *IM*, *MH* vnam reſtituunt pręciſe circulationem, ergo & reliqui ſimul *LG*, *HM*∶ *LH*, *G*K : *GL*, K*C* : *GK*, *CI* : K*C*, *IM* : *CI*, *MH* : *IM*, *HL* alteram conficiunt circulationem accuratè, quod fieri non poſſet niſi ad idem punctum, à quo ſumpſiſſent circulandi initium, perfectè regrederetur, quare Polygonus erit ordinatus heptagonus, quod inquiſitum fuerat.

ADNOTATIO PRIMA.

APparet igitur Geometras pro conſtructione heptagoni latus habuiſſe paratum, quod oppoſitum Analyſtis contigit, qui ſanè quæſitum tanquam conceſſum ſupponunt, ſub ignota magnitudine *IN*, deindè ex nota circuli ſemidiametro, vt prima, & IN, vt ſecunda ſeriem inſtituunt octo proportionalium ſub gradibus parodicis ad poteſtatem, cuius exempla

empla adduximus ſupra ad 18 Problema, in adnotatione 3, & facta operatione nobis exhibent hanc adfectam magnitudinem ſolidam

7 *N* — 14 *C* † 7 *QC* — 1 *QQC*

vt ex ea eruatur latus, ſiuè *IN* pro ipſo heptagoni latere, & ſecundum analyſeos præcepta optimè concludunt, ſed rem ad ſuum non deducunt ſcopum, etenim geometricè ex illo artificio nondum conſtitit haberi, ſed tantum latitaſſe quæſitum, nec ſuffragio arithmetico ad accuratum eſt deuenire, erat ideò negocium geometris commendandum, & à ſuis fontibus præcisè deducendum; præterea Analyſtę incidunt inter amphibola, cum pro multitudine adfectionis, etiam tot latera poſſe explicari, vt in ſuperiori erunt quatuor, continuatio poſtea pro ſeriè linearum proportionalium, & ſi per ſigna parodica *N*. *Q*, *C* &c. videatur aſcenſus, re vera eſt deſcenſus indicatus ijſdemmet ſignis, vt periti optimè norunt.

ADNOTATIO SECVNDA.

AT quotieſcumque magnitudo ſecundo loco poſita in ſerie proportionalium ſub *IN* ignoto latere excedit primam, tunc ſequentes augeri eſt ordinatum, verum caſu vtroque gradus parodici indicent ſuum cuiuſcumque locum, at de his alias, quod ſanè in præmiſſo problemate erit non iniucundum, illud nempè abſolui liceat vſque ad inuentionem lateris heptagoni, nulla circini facta variatione, vt quiuis ex

ſaltem

ſaltem initiatis cōmodè aduertere, ac experiri poterit. Igitur inuento *G* puncto, & ducta *GB* per biſectionem, aut arcus *CG*, aut anguli *CBG* habetur per *BD* lineam ipſa *CD* ſeptima circuli pars, quæ ſepties circumducta heptagonus explebitur accuratiſſimè: agantur lineæ *CG*, *CH*, *CI*, *CK*, *CL*, quæ cum tangente *EF* conſtituent numero angulos ſeptem *ECD*, *DCG*, *GCH*, *HCI*, *ICK*, *KCL*, *LCF*, omnes quidem æquales, ſunt namque ad contingentem *EF* cum ſecantibus anguli *ECD*, *CBD*, nec non *FCL*, *LBC* in coalternis portionibus æquales, & reliqui circumſtantes ſimiliter ob ſubſentas omnes pares fiunt, ſed ſi libeat faciamus periculum in numeris, etiamſi ad geometricam præciſionem attingere nequeant ſinuum tabulæ, vt conſtat ob numeros irrationales, ſit itaque arcus ſeptimæ partis

CD, 51. 25. 42 $\frac{6}{7}$ eiuſuè corda 86776

CG, 102. 51. 25 $\frac{5}{7}$ eiuſuè corda 156364

BD, 128. 34. 17 $\frac{1}{7}$ eiuſuè corda 180194

omnia ad radium 100000, nec ampliore indigemus, & ponamus inquirendum arcum, cui ſubtendit corda *BG*, igitur in quadrilatero *CD GB* duo diametri inter ſe ducti conſtituent (ex lemmate Ptolemaico, à pluribus

ribus euulgatum) rectangulum æquale ei, quod ſub lateribus *BC*, & *DG* fiet rectangulo, vna cum reliquo ſub *CD*, & *BG* ſimul ſumptis, at rectangulum ſub diametris *DB*, *CG* eſt 28175854616
& factum ſub *BC*,*DC* notis eſt 17355200000

Igitur reliquũ ęquatur ei ſub *CD*, *BG* 10820654616
& adplicatum ipſi *DC* 86776 exiet in quoto 124696

° ′ ″
pro corda BG, cuius iquirimus arcũ, & reperitur 77.8.33
deberi partes, at ipſi *CG* congruę fuerant partes 102.51.25 $\frac{5}{7}$

vt ſimul à duobus rectis deficiant vno 179.59.59 tantum ſecundorum minutum, ob ineuitabilem tabularum defectum.

ADNOTATIO TERTIA.

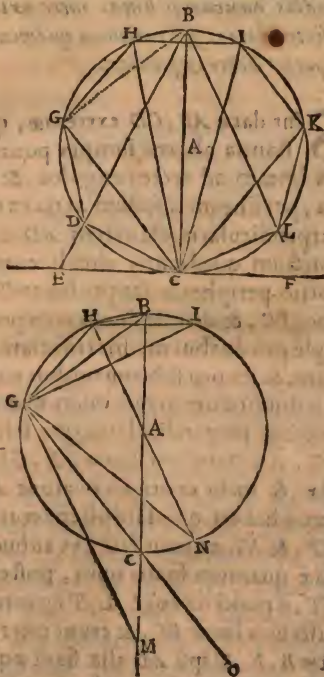
HEptagoni indicati latus ab analyſtis ſub ſuis gryphis, nos vero exhibuimus, & quia per duplicem circulationem magnitudo *CG* redit ad idem punctum, à quo ſumpſit exordium, vt autem afferatur circulus, cuius fiat *CG* ſeptima pars ſimplex, nullo negocio aſſequetur, ſi ad amplitudinem ſemidiametri *BD* ſcribatur, erit illud quęſitum efficiens, nam vt *DC* ad *CG*, ſic ſe habet *AB* ad *BD*, & ſi intelligatur

acta

acta *AD* sũt duo triãgula *CDG*, *BAD* Iſoſcelia, & ſimilia.

Porrò vt duplici circumuolutione *CG* ſepties, ſic *BG* triplici, per quater, & decies complentur circuli, etenim *CG*; $102^{\circ}.\ 51'.\ 25''\ \frac{5}{7}$ ſepti s ducta efficit 720. partes, Ita *BG* $77.8.34\ \frac{2}{7}$ quater decies ducta cumulat partes 1080; nempe tres circulos, oporteat exhibere circulum, in quo *BG* quater decies ſumpta illum expleat accuratè, replicetur: datus circulus (ad vitandam linearum confuſionem), & in eo ponantur, vt prius puncta *G*, *H*, *I*, & agantur *GH*, *GB*, *GI*, & ad angulos rectos ſuper *HG* ipſa *GN*, vt ſuper *GI*. ipſa *GM*, quę cum diametro educta conueniant in puncto *M*. Dico ſi fiat circulus ex ſemidiametro *BM*, illum eſſe quęſitum, & in eo pręcisè *BG* quater, & decies comprehendi, quod ſic oſtendi poterit, cum enim anguli *HGB*, *BGI* ſint ęquales, nec non *HGB*, *HCB*, quia ſuper æquales, aut eandem ſint peripheriam, anguli vero *BGC*, *HGN* in ſemicirculis recti, vt *MGI*, rectus ex fabrica, & præterea anguli *GHC*, *GBC* æquales, erunt triangula *HGC*, BGM æquiangula: recto enim HGN additus eſt HG C, angulus æqualis *H*GB, qui recto CGB appoſitus, erunt facti ex recto, & æquali HGC, BGM duo æquales anguli, & æquales oſtendimus GHC, GBC, quare

quare in dictis triangulis *GHC*, & *GBM* reliqui anguli ad complementum duorum rectorum *GCH*, *GMB* æquales fiunt, & ideò similia sunt triangula, & erit *GH* ad *HC*, ita *GB* ad *BM*, sed *GH* pro duabus circulationibus diametrum vnius habuit *GN*, & *GB* pro tribus assumit *BM*, seu mauis *GO* coęqualem in angulo recto *OGB*, vt erat *NGH*, & totum hoc opus breuiter excusabitur, si fiat, vt *HG* ad *HC*, ita *GB* ad *GO*, seu *BM*, circulos postea illos non describimus, quum à quolibet possint exhiberi, quare factum erit, quod volebamus.



P PRO-

PROBL. VICESIMVMSEPT.

Medias quotcumq; lineas inter extremas in vna ratione inserere datas, seu rationem quamcumq; datam æqualiter in partes secare imperatas.

Sint datæ *AB*, *CD* extremæ, quæ in earundem distantia alternè sumpta ponantur super iacentem *AB* lineam ad rectos angulos, & copulentur *BC* puncta, per lineam bisectam in *O*, ex quo puncto eleuetur perpendicularis occurrens *AD* in puncto *E*, quod erit punctum quadrantis circuli euntis circa *BC*, ex quo portio peripheriæ scripta super *BC*, erit arcus sectus á linea *BC*, & deinde diuiso arcu pro numero mediarum suplè pro duabus medijs trifariam, pro tribus quadrifariam, & ita pro subsequentibus eodem ordine, & à punctis diuisionum in casu duarum mediarum duobus, demittãtur perpendiculares, quæ selecabunt cum *BC*, sit in *FG*. Aio quod portiones *FX*, *GH* sunt inquisitæ mediæ, & ratio continua quatuor *AB*, *XF*, *HG*, *DC* inuenta haberi, quod ita ostendetur. Ponatur *AI* æqualis *XF*, & *XL* æqualis *HG*, vt adhuc *HT* æqualis *DC*, & aliæ quantum fuerit opus, postea iungantur *BI*, *FL*, *GT*, à punctis verò *I*, *L*, *T* agantur *IQ*, *LP*, *TY* æquidistantes lineæ *BC*, & erunt inter se: & similiter à punctis *B*, *F*, *G* ipsi *AD* aliæ fiant æquidistantes *BM*, *FK*, *GV*, quę erunt & inter se, at quia in parallelas *BM*, *AI* incidens linea *BI* angulos efficit coalternos æquales

MBI

MBI, *BIA*, veluti eadem *BI* in parallelas *BF*, *QI* incidens alios coalternos æquales *FBI*, *QIB*, & sunt isti illorum portiones, quæ sublatæ relinquunt æquales *MBF*, *QIA* angulos; & ita in cęteris consequẽtes, prętereà in parallelas *AB*, *XF*, *HG*, *DC* incidẽs *BC* facit angulos *ABF*, *XFG*, *HGC* æquales, à quibus sublati ęquales *FBI*, *GFL*, *CGT* erunt residui *ABI*, *XFL*, *HGT* ęquales in rectangulis triangulis, ergo & reliqui, quare ęquiangula sunt triangula *BAI*, *FXL*, *GHT*, &c. Ideo homologa in ratione erunt latera, hoc est *AB* ad *AI*, vt *XF* ad *XI*, sed *AI*, *XF* vna, & eadem linea sunt, ergo tres *AB*, *XF*, *XI*, seu GH proportionales, & duabus postremis *XF*, *HG* relicta prima sunt in ratione, vt *XL* ad *HT*, quare & *HG*, *XL* sunt eadem linea, & erunt in analogia tres aliæ *XF*, *HG*, *CD*, in qua fuerat *AB* ad *XF*, ergo assumpta rursus *AB*, quatuor erunt in proportione *AB*, *XF*, HG, *DC* continuę, quod effici imperatum fuerat.

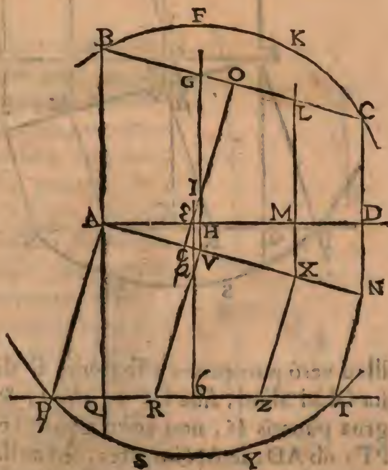
ADNOTATIO PRIMA.

QVod dicimus de duabus erit idem pro tribus, quatuor, & alijs, itaque negocium deuoluitur ad diuisionem anguli siue arcus, & siquidem proponatur angulus determinatus secandus, nulla habita ratione ad medias proportionales præter ea, quę supra ostensa sunt, eius dati anguli semissis constituatur in linea *OE*, complementum scilicet ad rectum ponendo ad *C*, vt *OCI*, sit complementum *OIC* ad rectum, vt totus angulus fiat *CIB* datus, factoque in *I* centro, delineabitur comprehensa anguli portio inter *BC* deinceps secanda in partes imperatas, & apparet, quod cētra portionū arcuum, siue angulorū infra iacentem lineam, & supra, semper tamen in datam positionem rectam *OE* occurrere contingūt, in *AD* tantum in angulo recto, quo casu obtinebimus inter extrema pcoportionales, & tunc non tantum pro-

proportio erit *AB* ad *ED*, vt AE ad *CD*, ſed æqualitas permutata inter iacentem lineam, atque extremarum aggregatum, vt in conſtructione fuerat indicatum, quumque ex alio, & alio centro ſcriberentur portiones, ſemper noua triſectio ſuccedet pro mutatione angulorum, centra denique infra aut ſupra *AD* indicant adgregatum extremarum maius, aut minus ipſa iacente linea, & in ipſa quadrantis punctum, vt conſtat, quare & proportionales, & anguli ſectionum exhibentur ex prædictis.

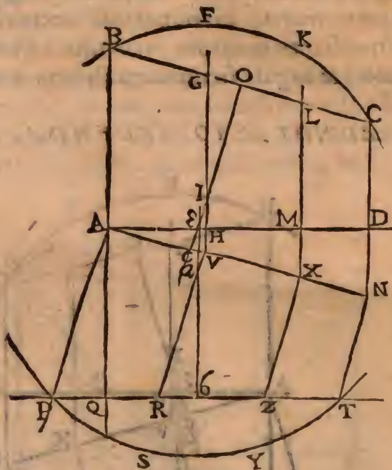
ADNOTATIO SECVNDA.

VT igitur in problemate aſſertum cui. dentius ſe oſtendat, ex *A* pũcto agatur *AN* æquidiſtans *BC*, & continuatæ GH, LM, CD ſuper ipſã cadant in punctis V, *X*, N, conſtat quod omnes erunt ipſi A B æquales, & v-



na ra-

na ratio conuersa inter partes *GH*, *LM*, *CD* erit cum adiunctis *DN*, *MX*, *HV*, porrò super eandem *AN* ex prædictis punctis eleuentur normales *AP*, *VR*, *XZ*, *NT* prioribus æquales, iunctàque *PT* indubium est per extrema transire mediarum, vtque in *BC* erat *OIε* ad angulos rectos, similiter ex dimidia *PT* in puncto *b* altera erecta, in eaq; eligatur punctum analogicum *a*, ex quo describatur arcus *PST*, qui similis fiet arcui *BFC*,



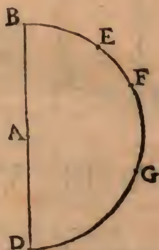
illud verò punctum *a* assequetur si dicatur *BC* ad *PT*, ita OI ad aliud, siue Oε ad aliud, & fient *a*, *c* congrua punctis Iε, non enim æquales erunt cordæ BC, PT; ob AD, ac AN impares, sed nulla turbatio occurret in effectione, quia nititur similitudine; duo post ea

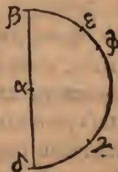
DAN

DAN, *PAQ* anguli æquales ſunt, vt rectorum reſidui, & ſunt illimet adhibiti in ordinatione demõſtrationis, qui ad reliquos terminos intelligi queunt extenſi, quare tam *F*,K per *HG*,*ML*,quam per *VR*,*XZ* habebuntur S, Y puncta, & conſtat diuiſio eſſe in partes vtrobique pares.

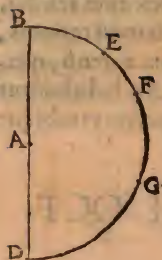
PROBL. VICESIMVM OCT.

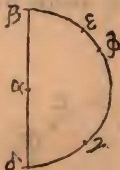
Portiones inæqualium circulorum diſſimiles in eadem ſecare analogia.





FOrtaſsè videbitur effectio huius cum problemate 19 coincidere, at aliter proponi non iniucundum ſupponimus,neq; inutile, ſi enim propoſitus angulus, ſiuè arcus ſecandus ponatur βγ, vt in aliqua fiat analogia, nempè vt ſe habet *BE* ad *EG* perficiam ſemicirculum *BGD*, hunc vero oportetſecare, ex præmiſſis in *F*, adeò vt fiat *BF*, ad *FD*,vt *DE* ad *EG*, deindè expleto ſemicirculo altero βγδ, eius peripheria iterum ſecanda erit, ea ratione in φ, vt ſemicirculus prior ſecuimus in *F*,quod facillimū erit per ęquali





litatem angulorum in centro, deindè vt ſe habet $\beta\varphi$ ad $\varphi\delta$, ita ſe habeat $\beta\varepsilon$ ad $\varepsilon\gamma$, ex ijs pariter, quę ſupra oſtẽſis. Nã ex a qualitate, ſiue ex communi animi conceptione, quę eidem ratione cõueniunt, eſſe inter ſe ęquales, ipſa dicta ratio, erat namque vt *BE* ad *EG*, ſic *BF* ad *FD*, & vt *BF* ad *FD*, ita $\beta\varphi$ ad $\varphi\delta$, & iterum $\beta\varphi$ ad $\varphi\delta$ ſe habet, vt $\beta\varepsilon$ ad $\varepsilon\gamma$, ex æquo igitur ſequitur eſſe $\beta\varepsilon$ ad $\varepsilon\gamma$, vt *BE* ad *EG*, quod erat faciendum, quæ relata ab arcubus ad angulos, erunt & anguli in eadem ratione, vti proponebatur.

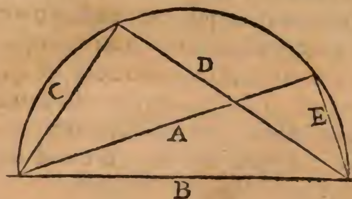
PROBL. VICESIMVM NONVM.

Angulum planum per artem analyticam ſecare triſariam.

EX opere geomerrico adhibitis rectis tantum lineis, deinde per ſemicirculi peripheriam, & diametrum eductam, poſtremò per arcus circuli, vt per genus proximius ſupra, illud idem abſoluimus, & demonſtrauimus, at quia indicauimus quo vſque Analyſtæ ſuo artificio progredi queant, ſciendum eſt, quod

ſi pro

ſi pro angulo ita trifariam ſecando, proponantur trianguli rectanguli omnia numero latera, etiam quãtitatem numericam laterum ſecundi trianguli licebit Analyſtæ afferre, adeò vt angulus ſecundi triens fiat anguli aſsũpti in primo triangulo, hoc eſt ſi nota dentur rectanguli trianguli omnia latera, vt *B* hypotenuſa ſit



1 7 5 7 6 Perpendiculum verò, ſit *D*
1 6 2 8 0 Et baſis, vt latus reliquo *C*
6 6 2 4 Omnia ſic *BDC* trianguli latera, ex doctrina ſectionum angularium, & aſſumendo ſyſtaticum problema ab Anderſono operi Vietæo de recognitione, & emẽdatione in fine ſubnexũ, vt angulus ſub *B*, & *C* triſecetur, & fiat angulus ſub *B*, & *A* triens prioris, conſtituetur ſecundũ triangulũ *BAE*, & res ad hanc deuoluetur æquationẽ, vt cubus ſub dupla baſe ſecundi trianguli, multatus ſolido ſub quadrato hypothenuſæ in eãdem ſecundi baſim, æquetur ſolido ſub quadrato hypothenuſæ in duplum trianguli primi baſim, quæ quidẽ æqualitas ſub ſpeciebus, vt inuenta eſt ſic proponitur

2 A C — BQ 3 in A ═ *B*Q in C2,

& vulgo ex numeris datis ita exprimitur

1 *C* -- 9 2 6 7 4 7 3 2 8 *N* ═ 4 0 9 2 5 1 6 2 0 0 4 4 8,

Q & niſi

& nisi darentur primi trianguli *BDC* latera, & communis fieret hypothenusa *B* ad inuentionem per numeros, ars non procederet, verum geometricum non turbat, cui relinquit operi, vt linearum A, & E magnitudines limitentur, at quia cubus adfici potest tùm à latere, tùm à quadrato pro vtroq; casu exempla afferimus, & in hoc priore adfectio est sub latere, & quia cubus adfectionis negatè multitudinem excedit extractio lateris, seu 1*N* directè fieri licet, ordinetur igitur, vt potestas solitaria ex vna parte maneat, & quod negatum est sub latere in aliam adfirmatè transeat,

1*C* = 40925162000448 † 926747328, *N*

Latus seu 1 N	✠92 40	674 925	732 162	8 004	48	
3	278 27	024	198	4		
27 9	9 481	267 949	473 360	28 404	48	
	18	534	946	56)		

6 7 4 8 4 3 0 6 9 6 4 4 8

Latus 2	54 3	6 8				
	57	68				
	9	926 804	747 306	328 964	48	

32	3	706	989	.) 312	
1024	13	511	296	276	48
3072 96 4.	12	288 153	) 6) 64)		
	12	442	24		
	1	92 069	674 056	732 276	8 48)
324 324		370	698	931	) 2)
104976	1	439	755	207 .)	68 .
314928 972 4.	1	259 1	712 555	)) 2) 64))	
	1	261	267	84	
3244 3244		9 178	267 487	473 367	28 68 .)
10523536		74	139	786	24)
31570608		252	627	153	92
9732 Latus. 8.		252	564 62	864 284 5	) 8) 12)
32448.		252	627	153	92

Latus inuentum 32448 eſt *A* duplum, quare ſimplum *A* quæſitū fiet 16224, & *E* reſiduū à quadrato ipſius *B* hypothenuſę erit 676, & trianguli ſecundi *BAE* duo latera *BA* comprehendunt trientem anguli propoſiti ſub lineis numero datis *BC*, ideò factum quod oportuit.

EXEMPLVM SECVNDVM.

Contingit aliquando ob negationis vitium, quod non tantum adficiatur poteſtas, at ipſa adficiat ſolidum, ex inde oritur ambiguitas lateris, quam vt caueat Analyſta congruum adhibit remedium, & in hoc caſu per πρῶτον ἔσχατον, vt ipſe inuentor docuit in opere de recognitione, ac emendatione æquationum, quo artificio latus negatum in adfirmatum tranſit quadratum, & homogenum comparationis in ſuum quadratum eleuatur, eductum deindè latus adplicandum venit propoſitum ſolidum, vt parabolæ ſemiſſis, quæſita fiat ſecundi trianguli baſis. Proponatur igitur

1 *C* -- 14480427 *N* = 7993195704

vt lateris ambiguitas declinetur, ſic iterum proponendū

1 *C* + 14480427 = 63891177562444055616

& quia adfectio eſt ſub quadrato magis operoſa fit effectio ob plana expletionum, & erit vt ſequitur.

✠	14 63	480 891	427 177	562	444	055	616
Latus. 1.	1 14	480	) 427	lat. pri.	cubus pri in quadr. 1	mi lateris adfect.	))aufer.)
plan.exple-	tionis. 2 48	896 144 410	085 804 750	4 ,à co- 27 562	efficiente coefficiēs reliquum	in dupl. la lōgitudo reſoluen-	teris pr. di
9	2 2 11 26	7 43 729 729 064	145 768	))) 87) 6)	tripl. q.pr tripl.latus cubus à à q.lateris a latere 2.	lateris in prim.in q. latere ſe-- ſecū.in co in plan ex	ſecundū ſecundi cundo efficiētem pletionis
	43	652	914	47	ſubtrah. à	reſoluen-	do
	4	550 1 757	256 448 836	226 042 092	7 444)	055	616
7	3	758 27 851 70	1 93 343 793 954	582 092	)))) 3)		
	4	709	120	674	3		
0.		5 48	705 715	288 144 418	238 804 144	0 27 055	616

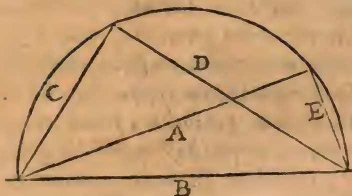
		8	149	890	0	)	
			2	895	90	)	
					343	)	
7		39	937	017	666	0)	
			7	095	409	23)	
						)	
		48	096	899	318	23)	
			57	073	154	977	80
				1	448	042	7
			618	518	825	825	16
o.						.	.
			104	858	779	230	0)
					478	880	10)
							729)
			513	658	394	800	20)
				1	172	914	587)

Latus integrum
1970709 = 6185188258 25616

collecta omnium ſubtrahendorum ſumma æqualis reliquo reſoluendo, quare erutum adfecti cubi ſub quadrato latus fit 1970709, quod adplicatum propoſito ſolido

$\frac{7993195704}{1970709}$ erit quotus, ſeu parabola

4056 cuius ſemiſſis
2028 erit ſimplum *A* quæſitum pro baſe ſecundi triangu-
845 li, & perpendiculum eiuſdem *E*, vt differentia quadratorum *B*, *A*, ex quo in hoc ſecundo exemplo ponatur *B*
Hypo-



Hypothenusa 2197
D perpẽdiculũ 2035
& C basis 828
atque incidens in æquatione, vt in priore exẽplo, A 2 C -- B Q 3 in A = B Q in C 2, cubus etiam adfici potest adfectione duplici, vt duo sunt scalares gradus, at simul adfectio eiusmodi nihil ad trisectionem anguli in triangulo conferre potest, constat itaque quo vsque analyticum pertingat opus, nec quicquam quod geometricum sit conturbat, eidem relinquens suum illibatum munus, & quia quos vidimus authores pro trisectione anguli, ac duarum mediarum inter totidem extremas, agnoscunt assumptum suffragium haud esse geometricum culpandi non veniunt, at Ioannes Moltherus in quodam libello de duplicatione cubi edito Francfurti 1619, ac Principi Mauritio nuncupato plura pollicebatur, vt geometricè illa eadem, & alia supplere, at demum cum Vietæo coincidit postulato, & mirum quippe quàm lepidè illud dissimulet, ait namque in historica narratione de duplicatione cubi mihi fol. 26.

„ *Subtilissimus Vieta nihil quod censuram sustineret venatus est; Clauius in Geometria practica aliquot antiquorum geometrarum producit mechanemata: Verè, ac geometricè duas medias proportionales ad eam vsque diem inuen-*

„ *inuentas disertè negat, &c.* & paulo infra nẽpe fo. 27.
„ *hoc posterius (nempe mediarum duarum) nullatenus*
„ *nec ab illis, nec à recentioribus geometricè potuit obiri.*
„ *At nos rem istam exploratæ per plurima sæcula difficulta-*
„ *tis, in qua mortalium ingeniosissimi hæsitarunt, ita ex-*
„ *peditam, facilem, obuiam, parabilem, promptamque*
„ *dudum animaduertimus, vt quia hasce postulati legitimi*
„ *conditiones obtinet, Postulatus sit proxima, meritòque*
„ *annumeranda, adeò vt nequaquam ceu problema conten-*
„ *tiosum anxiam constructionem, ac demonstrationem re-*
„ *quirat, sed tanquam principium per se manifestum, seù*
„ *contenta sit explicatione, qua adhibita à quolibet capi, &*
„ *assensum mereri possit, & hisce præmissis initio operis ait.*
„ *Postuletur, duabus lineis, punctoque in eodem plano*
„ *situ datis, vt è puncto isto linea recta applicetur, cuius*
„ *portio à lineis illis intersecta alteri rectæ longitudine da-*
„ *tæ sit æqualis.*

Quid igitur Author iste hisce ampullatis verbis inędificet non video, nisi quod dum Vietæum repellit postulatum, quod facit suum, suamet suo iudicio condemnat, vt à geometriæ numero aliena, interim cum cæteris, & plusquam aliis reijciendus author iste, & vt cum Vieta clarissimo cepimus cũ eodem claudatur, at si geometriæ aliquid hactenus detractum æqui Censores nouerint pro eorum ingenuitate speramus vnicuique suum restitui pronuntiaturi oportere.

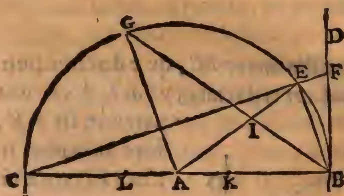
PRO-

PROBLEMA TRICESIMVM

Arcus pentagoni congruus habetur determinatus ante Isosceles trianguli conditionarij constructionem, scilicet in quo angulus vteruis ad basim est ad reliquum verticis in ratione dupla.

SIT circulus, cuius diameter *BC*, quæ duobus punctis secetur æqualiter trifarian, vt in *L*, k, & vna partium sit *B K*, hæc ponatur in linea *BD*, quæ tãgat in *B* circulũ, & *BF* ęqualis ipsi *BK*, deinde ex reliquo extremo diametri *C* agatur *CF*, hæc secabit peripheriam in *E* puncto, iungatur *AE*, postea angulo *BAE*; *ABI* angulus construatur æqualis, & porrecta *BI* dabit in peripheria punctum *G*. Dico quod arcus *CG* sit totius circuli quintans. Iungantur *AG*, *BE*, quoniam duo anguli ad *A*, & *B* in triangulo *ABI* æquales facti sunt supra basim, isosceles sit triangulum, & alter angulorum est in peripheria, alter verò in centro circuli, sequitur ex conuersa propositione 20 libri, 3 arcus oppositi esse in ratione dupla, sed tàm *CAG* angulus, quám *AIG* angulus, dupli sunt anguli *ABI*, nam

rum alter eſt in centro, alter verò externus in iſoſcele, ergo æquales ſunt anguli *CAG*, *AIG*, qui detracti è duobus rectis, relinquentur *BAG*, *BIA* æquales, & ideò iſoſcelia, & ſimilia ſunt eadem triangula, & ſi quidem ab æqualibus *BAG*, *BIA* angulis æquales anguli *BAI*, *BGA* ſubtrahi concipiantur, relinquentur ęquales *GAI*, *GIA* anguli ſupra baſim *AI*, & fiet iſoſceles triangulum *AGI*, ergo *GAI* æquabitur angulo *CAG*, quare peripheria *CGE* ſecta erit bifariam in *G* puncto, & angulus *BAE* ſubduplus tùm *CAG*, tùm *GAE* angulis, ſemicirculi igitur peripheria in quinque portiones diſtributa erit, quarum vna *BE*, & eius dupla *CG*, erit quinta pars totius peripheriæ circuli, inuenta ante omnem conſtitutionem iſoſcelis conditionarij pro quæſito Polygono laterum impatium, ab antiquis requiſiti.



ADNOTATIO PRIMA.

POterat quidem inuento puncto *E* aliter reliquũ abſolui, vel ex duplo arcu *BE*, haberi ſtatim punctum *G*, vel è centro acta *AG*, æquidiſtanti *BE* rectæ, at libuit per æqualitatem angulorum ſupra ſemidiametrum

trum incidere, vt forma, quæ alijs polygonis á pentagono fit communis, & præter duo iam agnita isoſcelia ſimilia *BAG*, *BIA*, duo ſunt alia ad angulum communem commiſſa, nempè *AGI*, *IBE*, nam anguli *AGI* vnius æquatur angulo *IBE* alterius, quia *ABE* bifariam ſecatur, & reliquus *GAI* reliquo *BEI* æquatur: ſunt igitur homologa ſimilium latera triangulorum, hoc eſt *BG*, *BA*, *BI* proportionalia, vel *BG*, *GI*, *BI*, ergo in puncto I ſecatur *BG* media, ac extrema ratione, ſimiliter in analogia ſunt *AE*, *AI*, *IE*, quare & *AE* ſecatur in eodem *I* puncto media iterum, ac extrema ratione, & conſtat ante conſtructionem conditionarij ttianguli iſoſcelis exiſtere polygonum quinque lateribus ordinatum.

ADNOTATIO SECVNDA.

EVclides quippè methodum inſcribendi pentagonum ordinatum tradidit dependenter ab iſoſcele iam dicto; & Ptolomeus in Almageſto ex ſectione analogica ſemidiametri illud idem ordinauit, ex indè authores cæteri crediderant pro polygonis imparium laterum, inquiri oportere conditionaria iſoſcelia, ſed nec exhibita à nemine fuerant, nec expectanda vlterius; quia vt in Phyſicis contingere nouimus, ex mixtioné diuerſarum ſpecierum vltra primam, haud admittit natura deinceps proles, ſic in Geometricis quaſi ex compoſitione rerum diuerſæ ſpeciei, haud licet vltra pentagoni ſtructuram per mixtionem linearum, & an-

gùlorum ſecare peripheriam de genere curui, & ideò ex genere proprio ſuperius, & hìc factum conſpicitur.

PROBL. TRICESIMVMPRIM.

Arcus heptagoni congruus habetur determinatus ante iſoſcelis conditionarij conſtructionem, nempè in quo angulus verticis eſt ad reliquos in ratione ſubtripla.

SIT circulus cuius diameter *BC*, & hęc æqualiter ſecetur, tribus adhibitis punctis, quadrifariam: ſit deinde tangens circulum *AD*, in eaque ponatur *BF*, vni partium nempe *BK* æqualis, & à centro *A* conducta *AF*, ſecabitur peripheria in *E*, poſtea angulo *BAE* conſtruatur ãgulus *ABI* æqualis, & porrecta *BI* dabit in peripheria punctum *G*. Dico arcum *CG*, arcum eſſe heptagoni congruum circulo ordinati. Secetur bifariam arcus *GE* puncto *L*, & ducantur *AG*, *AL*, *BL*, *BE*, & etiam ſi lubet *CE*, fiet angulus *EBD* ad tangentem ęqualis *BCE* in ſegmento alterno, ſeu *AEC*, (hac ſcilicet quantitate anguli ſupra *BE* in iſoſcele minuuntur à recto) & anguli *ABE*,

AEB

AEB in tripla oſtendentur eſſe ratione ad angulum verticis *BAE*; quoniam anguli *BAI*, *ABI* facti ſunt æquales, oppoſiti arcus eſſe in ratione dupla *CG* ad BE ſupra fuit demonſtratum, & ABL iſoſceles, quum ſit anguli ALB, ABL ęquales, ſicuti angulus LAE in centro, æquatur angulo GBE, quia iſte ſuper duplam inſiſtit peripheriam, ergo duo anguli ABL, G*B*E euadunt æquales, à quibus portio GBL communis ſublata, relinquuntur anguli CBG, LBE æquales, quare & arcus quibus inſiſtũt CG, LE ęquales, at G*L*, & *LE* ſunt ęquales, ergo quilibet arcus *CG*, *GL*, *LE* fit duplus ad arcum BE, hoc eſt arcus BE ſeptima fiet ſemicirculi portio, ſeu angulus in centro BAE, ſubduplus cuiuſlibet angulorum *CAG*, *GAL*, *LAE*, & ęqualis ſit angulis CBG, *GBL*, LBE, quare ante conſtructionem huius trianguli conditionarij A*B*E, & natura, & tẽpore determinata habetur portio *CG* in circulo pro heptagono oportuna; vt fuit quęſitum.

ADNOTATIO PRIMA.

SEquitur ex oſtenſis quod AG, *B*L ſint ęquidiſtantes, etenim æquales euadunt anguli AL*B*, LAE, & iſoſcelia triangula AOL, O*BE*, non tamen ſimilia, ſed ABE, EBO ſimilia, ſicuti A*B*E, ABH ſimilia, & æqualia, nam iterum ſimilia fiunt ABG, IBA, & quia anguli CAG, AIG ſunt æquales, quum ad A*B*I quilibet ſit in ratione dupla, ergo ſublati ex duobus rectis, reliqui BAG, *B*IA ęquales ſunt, quare triangula A*B*G, ABI ſimilia ſunt, præter quam quod ad baſes BG,

& *BA* erant anguli pares, & ideo homologa fiunt latera *BG*, *BA*, *BI*, & in triangulis *AHI*, *BIE*, & ſimilitudo, & qualitas adeſt, vt ex angulis patet, ideò *HI*, *IE*, *AH*, *EB* ęquantur, & baſes *AI*, *IB* erant pares, igitur æqualibus æqualia additis *BH* æquatur *AE*, & iſoſcelia *ABH*, *ABE*, angulus nempe *AHB* triplus ſit anguli *ABH*, quod rectè conſequitur, quum poſſit duos *HLB*, *HBL* internos, hoc eſt *ABL*, & *HBL*, quare erit, vt *G*B ad *BH*, ita *BH* ad *BI*, vt tota ad totam, ita ablata ad ablatam, & reliqua *GH* ad *HI*, & non nulla alia aſſimilari cum conicis ſectionibus.

ADNOTATIO SECVNDA.

AD Punctum igitur K ſi eleuaretur perpendicularis tranſibit per *I* punctum, & erit portio æquilateri trianguli circulo inſcribendi, ad hanc lineam ex A centro requirebat Vieta in 8 libro Variorum capite 7. quod inclinaretur recta hac ratione, vt *IE* æqualis efficeretur cordæ EB, nam ibidem aſſumpſerat ſub examine tres methodos pro heptagono effingendo, exhibitas ab Illuſtri quondam mathematico, & eius cenſura fuit, eſſe

Primam geometricam, ſed veræ tantum proximam, non etiam accuratam, alteram veram, & accuratam, ſed non Geometricam.

Tertiam Geometricam, ſed ἀσυλλόγιστον & omnes vt par erat reprobauerat, in ſecunda tamen forma, quæ mechanico tantum hærebat duo ſtabilierat, ſuo

rat ſuo more elegantiſſima theoremata, ad illa lectorẽ remittimus, & ex inuenta æqualitate inclinatę *IE* ad *E*B concludebat heptagonum ſubſiſtere ordinatum, verum, & ęqualitas eadem eſt quid poſterius ipſo heptagono, quo prius à nobis multiplici ratione exhibito duo illa theoremata omni pede procedent.

PROBL. TRICESIMVMSEC.

Arcus in circulo congruus enneagono, habetur ante inuentionem ſui trianguli conditionarij.

IN circulo cuius BC diameter, hæc quatuor punctis ęqualiter diſtantibus in quinque dirimatur

portiones, quarum vna ſit BK, quę vt ſupra in tangentem BD ponatur, vt ęqualis BK ſit BS, & iungendo *A*S ex centro ſecabitur peripheria primum in *E*, & producta diametro ad ſemiſſem eius *CG*, agatur *GE* linea, quę vlterius ſecabit tangentem in puncto *O*, ex quo

iterum

iterum ad *A* centrum conducta linea *AO* secabitur secundò peripheria in *F*, deinde angulo B*AF* construatur angulus AB*I*, & protracta B*I* secabitur peripheria in N. Dico quod arcus *CN* erit nona pars accuratè totius circumferentię, & sic demonstratur. Iungantur A,N, cui æquidistet BM, & arcus *MF* secetur bifariam in *L*, & alię ducantur AM, AL, *BL*, *BF*: igitur anguli NAM, AM*B* alterni sunt ęquales, & AN*B*, NBM

æquales, vt æquales CAN, CBM in centro, & ad arcum, quare tres CAN, NAM, MAL anguli ęquantur, similiter & huic postremò ęqualis *LAE*; ergo dupli omnes eiusdem anguli *BAF* fiunt, & tota semicirculi peripheria distributa habetur in nouē portiones, quarum vna est *BF*; & totius circumferentiæ nona pars fit eius dupla *CN*. Idcircò ante conditionarium Isosceles pro enneagono eius oportunum latus habetur natura, & tempore, quod erat intentum.

ADNOTATIO.

1 POterat etiam, & punctum F reperiri absque eo quod produceretur diameter in G, at forma assumpta, & commodior visa fuit, reique magis propria, nam pro figuræ primæ scilicet Isopleuri arcu, vtitur sectione diametri in centro, & semissis reflectitur intra, vt sextans fiat, reliquus verò ad semicirculum est quæsitus arcus.

2 Deinde dum secatur diameter duobus punctis trifariam æqualiter ad tangentem operatio prouocat, & limitatur arcus pẽtagoni à reliquo diametri extremo

3 Postea pro tertia figura imparium, nempè heptagono, secatur ipsa diameter tribus punctis quadrifariam, & cum tangente arcus determinatur á semidiametro ex centro.

4 Igitur quod tàm arduum censebatur, tàm facilè, & secundum naturam reperiri contingit. Si verò ad vlteriora, hac methodo progredi lubeat non vnica, sed replicata sectione, vt in enneagono factum est, posset expediri, & tunc quatuor punctis dirimetur diameter æqualiter, nempe quinque portiones, at vlterius etiam excedere licebit, & si satis implexa effectio sortiretur, nobis satfuit demonstrasse in omni polygono imparium laterum prius attingi arcus lateri competens, quã reperiatur conditionarium isosceles, quod illa deinceps inquirere superfluum videatur, ac inutile, cum aliàs haberi queant, vt ostensum fuit.

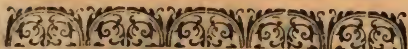
Soluentes itaque Perge magni nuncupati Geo-

metræ manes; poſt ampliſſima vaſti pelagi perluſtrata iam litora; ſibiq; plurima, ac prætioſa admodum oblata, adhuc neque alumnos excitare quieſcentes; ad anguſti Tynheni ripas dum conuergerent proras, contigit *ITER* proſpexiſſe *REGIVM*, quo pauca hæc exorta haud indignabundæ ſibi onerari adnuerant.

FINIS.

INCLINATIONVM GEOMETRIÆ
PARERGON

EODEM AVTHORE·



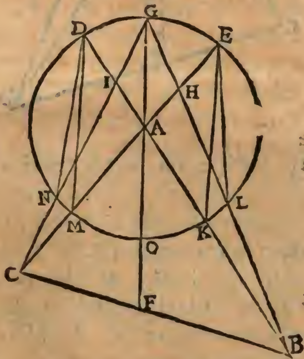
INGENVO LECTORI S.

IN primæuo exortu suo, cuiusuè nec parum indigens opusculum de reflexionis puncto agnoscebatur, industria caruit obstetrice, meritò igitur sibi postulabat reflecti, quod aliquando consensimus, & curiosè prolixa rescindere consilium fuit, vt reliqua ferè alia methodo construere, ac demonstrare, & pro illo vt supponimus fungi criticis sublatum officio, ita nec immemores, in hoc exerceri Parergo translatum, vbi tria opticorum potissima è mechanicis ad Geometriam problemata inuenies reuocata, vtinam onus aliquis susciperet totum illud nobile repurgandi, Geometriæ vè vinduandi opus. Vale.

PROBLEMA PRIMVM.

Dato circulo, & duobus punctis extra inæqualiter à centro remotis, duas inclinare lineas ad angulum in peripheria, quem bifariam diameter dirimat.

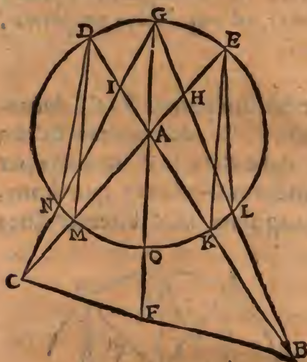
SIT circulus circa *A* centrum puncta *B*, *C*, ducantur per centrum *BAD*, *CAE*, & connexa *BC* ita secetur in *F*, vt sit *BF* ad *FC*, sic *BD* ad *CE*, & ducta per centrum *FAG*. Dico punctum *G* efficere quæsitum, hoc est iunctis *BG*, *CG* angulum *BGC* bisecare linea diametri *GAF*, & ex præscriptis in opticis, dicetur *BG* incidentiæ linea, *CG* reflexionis, aut ècontra, vt angulus BGC reflexus, & punctũ G reflexionis. Iungantur *MD*, *ND*, KE, *LE*, vtq; anguli, qui ad *BC* sunt extra reuocentur ad circulum; arcus suscipiãtur *MN*, KL, siue pro eis *MDN*, KEL anguli cõpetẽtes, hisce



paratis cõsiderentur triangula *BAH*, *CAI* ad angulum composita communem *BAH*, seu *CAI*, erunt *AHB*, *ABH* internis æquales simul duobus *AIC*, *ACI* cum ambo

æquen-

ęquentur vni externo *BAC*, ergo exceſſus idem fiet inter *AHB*, & *AIC*, qui inter *ACI*, & *ABH*: at angulus *AHB* æquiualet in alio *HEL* triangulo duobus internis *HEL*, *HLE*, & angulus *AIC* æquiualet in alio *IDN* triangulo duobus internis *IDN*, *IND*; quare idē exceſſus fiet duorum *HEL*, *HLE* angulorum ſimul, ſupra angulos *IDN*, *IND* ſimul, quam anguli *ACI* ſupra angulum *ABH*, ſeu arcus *GE* ſupra *DG* arcum, qui à prædictis angulis in oppoſita occupātur peripheria, aut ſi mauis acceptis ex aduerſo *MO*, & *OK* tantundem differre oportebit, quantum anguli adgregatum *MEL* † *ELG*, ſeu arcus *ML* † *MO* excedunt ſupra angulos *KDN* † *DNG*, ſeu arcus *KN* † *DG*, ideſt *KN* † *OK*, & ſublatis vtrobique ęqualibus *MO*, *OK* repetitis, idem erit exceſſus *ML* ſupra *NK*, qui viciſſim *GE* ſupra *DG*, & ablato communi *MK* erit exceſſus idem inter *GE*, & *DG*, ſeu *MO*, & *OK*, qui inter *KL*, & *MN*, quare erunt quatuor termini, bini, ac bini in arithmetica analogia, nimirum *MO* primus, *OK* ſecundus, *KL* tertius, & *MN* quartus, qui ſi compa-



rentur

rentur, prima cum poſtrema, magnitudo eadem conſtituetur, quam ſi comparentur ſecunda cum tertia, ideò additis arcubus *MO*, & *ON*, & alijs K*O*, & KL, id eſt duo arcus *NO*, & *OL* fient æquales, ergo & totus angulus *LGN*, id eſt *BGC* diſtinctus per æquales á diametro *GAF*, & fit *G* punctum reflexionis, & angulus *BGC* reflexus, & duo *GN*, *GL* portiones ęquales.

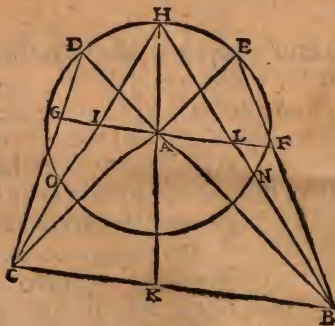
SCHOLIVM.

NEC poterit in caua peripheria aliud punctum reperiri præter *G*, verùm poſſibile eſt tailter haberi ex diſpoſitione ſitus punctorum, vt non biſecetur angulus reflexus à diametro, ſed ab altera linearum, & tunc portiones de circulo *GL*, *GN* fient inæquales, vt infra dicetur: præterea in quibuſdam caſibus duo licebit inuenire reflexionis puncta, vnum ſcilicet in latere peripheriæ, quod mixtus habeatur pro caua, & conuexa, vt in vltimo dicetur problemate: alterum vero, vt factum *EH*; & ne præmiſſa forma cum arithmetica analogia alicui minus arrideat, ſuccedat conſtructio altera ex pluribus alias exhibitis, à quibus nunc declinamus, cum pauca abundent. Sit itaque.

PROBLEMA SECVNDVM

Datis iisdem circulo, & duobus punctis extra idem præstare.

AGantur per centrum *BAD*, *CAE*, & iungantur *CD*, *BE*, etiam *BC* connexa, ſecetur in K, vt fiat *B*K ad K*C*, ita *BD* ad *CE*, deinde per centrum *A* ducatur *FG* ęquidiſtans ipſi *BC*, & ducta K*AH*. Dico *H* pũcto in periphe-ria effici quęſitũ, nimirum connexis *BH*, *CH*, ipſe angulus *BHC* dirimi à diametro *H*K bifariã; quoniam enim eſt, vt *B*K, ad K*C*, ita *FA* ad *AG*, hoc eſt *LA*, ad *AI* ob æquidiſtantiam *LI* à baſe trianguli *BC*, erit permutãdo, vt *B*k ad *LA*, ita *C*k ad *AI*, ſeu vt *BH* ad *HL*, ita *CH* ad *HI*, & vt *B*K ad *BH*, ita *AL* ad *LH*, pariter vt k*C* ad *CH*, ita *AI* ad *IH*, & ideò conuertendo, ac permutando *HL*, ad *HI*, vt *AL* ad *AI*, quare in triangulo *LHI*, laterum ratio *LH* ad *HI*, & in eadem analogia cum baſeos ſegmentis *L*A ad A*I*, ergo & angulus *LHI*



ſeu

ſeu *BHC* biſectus eſt à diametro *HAK*, quod fieri oportuit.

PROBLEMA TERTIVM.

Datis circulo, & duobus punctis intra ambitum in ſitu, vbi linea connectens per centrum non tranſeat, idem efficere

SIT circulus circa *A* centrum, & duo puncta *B*, *C* intra, in diametris diuerſis, agantur *BAD*, *CAE*, & centro facto in *B*, diſtantia *CE*, & viciſſim centro in *C*, diſtantia *BD* portiones circulorum ſe mutuo ſecent in *F* puncto, è quo per centrum ſi agatur FA*G*. Dico quod *G* punctum erit quæſitum, nempe ductis *BG*, *CG*, angulum quem faciunt *BGC* biſecare diameter *GAM*, quod ita lubet oſtendere. Ducatur K*AO*, & compleatur *ECL*, porrò ſi aſſumatur triangulum *GCI*, in quo angulus externus *GIE*, & ab eodem auferatur alter internorũ, puta *GCI*, relinquetur alter *CGI*; ſed vice angulorum ſuſcipiantur competentes arcus, id eſt pro *GIE*, ſeu verticali *BIC*



eſt arcus *LK* (quod patet ſi iungeretur *LG*.) & pro angulo *GCI* eſt arcus *GE*, ſeu *LM*, qui deductus ex *LK* relinquetur *MK* pro arcu determinante magnitudinem reliqui anguli *CGI*, ſeu *HGK*, ita vt angulus in centro reſpondens arcui *MK* fiat æqualis *KGH* angulo in peripheria, ergo *MAk* duplus ſit anguli *AHk*, quod eſt verum in externo Iſoſceles *AGK*,



Deindè pergamus in eodem triangulo *CGI* aliud latus productum, erit angulus externus *ECH*, á quo ſi alter internorum *CIG* ſit ablatus, & alter rurſus *CGI* relinquetur, ideò recurrentes ad arcus congruos, erit *GOL* arcus pro angulo *CIG*, ſeu ex aduerſo arcus *MAE*, qui ſubductus de arcu *EMH* congruo ad angulum *ECH*, erit reliquus arcus *MH* competens reliquo angulo *CGI*, iſte in peripheria, & *HAM* competens *MH* in centro; quare æquales fiunt *HAM*, & *HGK*, ſiue *HAM* externus in iſoſcele *HAG*; ſed fuerat *MAK* in centro æqualis *HGK*, modo *HM* æqualis eidem *HGK*: ſequitur igitur *KM*, *MH* eſſe pares, & angulus *BGC* biſectus à diametro *GA*. quare *G* punctum ſit reflexionis, vt quæſitum fuerat.

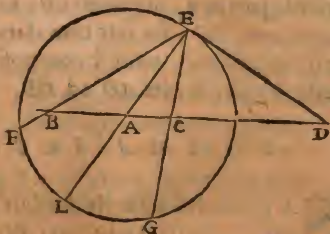
SCHO-

SCHOLIVM PRIMVM.

VT igitur nouã eiuſmodi ratiocinandi, ſed geometrica formam minus aliquis audeat non probare, infra problemate octauo, vbi eadem conſtructione vtemur, alia argumentabimur methodo, vtque ſequentia per occurrentes caſus melius explicentur, neceſſe erit aliundè non nulla hic ſubnectere mutuata, & pro vno ſymptomate ſit.

SCHOLIVM SECVNDVM.

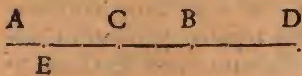
SI duo puncta intra in vnam conſiſtant diametrũ, & quæſitum ſit idem reperire punctum reflexionis, hoc iam ſolutum habetur apud Vitellionem propoſitione 17 libri 8, & apud Cõmãdinum in commẽtarijs collectionum Pappi ad propoſitionem 57 libri *ά*, qui authores ſic oſtendunt. In circulo ſit linea *BC* per centrum *A*, & quæ ratio *BA* ad *AC*, ita fiat *BD* ad *DC* additam, & à puncto *D* ſit ducta *DE* tangens circulum. Aio punctum *E* eſſe quęſitum: ducatur *AE* diameter & erit angulus *AED* re-



ctus, deindè iunctis *EBF*, *ECG* sunt duo anguli *GEL*, & *FEL* æquales, hoc est à diametro bisectus est angulus *BEC*, & fit *E* reflexionis punctum, & ad integram perceptionem huius effectionis pertinent duo sequentia lemmata.

LEMMA PRIMVM.

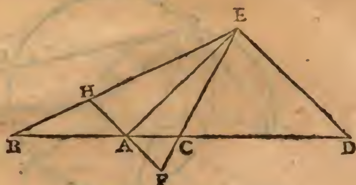
DAtæ lineæ vno puncto sectæ, addere portionem, vt fiat tota, & addita, ad additam, ita ratio partium, nimirum *AB* secta sit in *C*, & eidem apponatur *CD*, vt sit eadem analogia *AC* ad *CB*, quæ aucta tota *AD* ad ipsam *BD*, facillima res est; fiat *AE* differentia partium, ponendo *CB*, *EC* æquales, & vt *AE* ad minorem *EC*, ita fiat tota data *AB* ad quartam *BD*, erit quæsitam, nam à compositione argumentando erit *AC* ad *CB*, ita *AD* ad *DB*.



LEMMA SECVNDVM.

SI linea secta fuerit duobus punctis, vt *BD* in *A*, & *C*, & sit *A* ad *C*, ita *BD* ad *DC*, & à punctis *A*, *D* inclinentur lineæ *AE*, *ED* ad angulum rectum, vt *AED*, deindè ad idem punctum iungantur etiam *BE*, *EC*, ostendit Commandinus ad propositionem 52. libri 6. in Commentarijs Pappi Collectionum, quod duo anguli

anguli *BEA*, *CEA* sunt æquales. Agatur per *A* punctum linea *FAH* æquidistans *DE*, & concurrat cum producta *EC* in *F*, erit vterque angulus ad lineam *EA* deinceps rectus ob rectũ *AED*, & cum sit ex hypothesi vt *BD* ad *DC*, ita *BA* ad *AC*, erit permutando *BD* ad *BA*, vt *DC* ad *CA*, verum vt *DC* ad



CA (ob similia triangula *DCE*, *ACF*) ita *DE* ad *FA*, & vt *DB* ad *BA*, ita (ob eandem rationem) *DE* ad *AH*, quare eadem ratio erit *DE* ad *AF*, quæ *DE* ad *AH*; ergo æquales sunt *FA*, *AH*, quibus addita communis *AE*, duorum triangulorum latera duo *FA*, *AE*, & *AH*, *AE* æqualia habentur, & continent æquales nempe rectos angulos; igitur penitus æqualia sunt illa duo triangula *EAF*, *EAH*, & angulus *FEH* diuiditur bifariam per lineam *AE*, quod erat demonstrandum.

PROBLEMA QVARTVM.

Dato circulo, & punctis, altero intra, altero extra, vt iungens linea non transeat per centrum, inuenire punctum reflexionis.

Sint

SInt punctum *B* extra, *C* vero intra circulum, & *BC* non eat per centrum, secetur bifariam pars in circulo in *E* puncto, deindè fiat vt *BE* ad *EC*, ita

BD ad *DC*, & semicirculus scribatur super *DE* secans datum in *G*, ad quod si inclinentur *CG*, *BG* constituentur æquales anguli *BGE*, *CGE*, vt in secundo ostensum est lemmate, quare *G* reflexionis erit punctum, & angulus *BGH* reflexus bisecatur à diametro, & constat propositum.

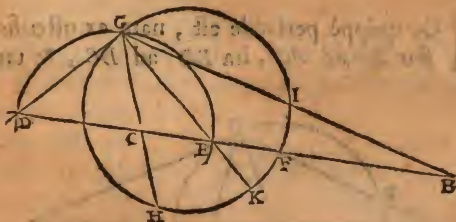
SCHOLIVM.

VT classici opticorum Authores, mechanico vsi fuere auxilio ad determinandum in sphærali punctum reflexionis, nihil illis in mentem subierat in quibusdam casibus duo ab ijsdem datis positione punctis, obiecti scilicet & potentiæ haberi posse puncta reflexionis, quos casus infra sumus explicaturi, quod

vt

vt nouum ac iucundum fore confidimus.

Cæterum continget aliquando haberi reflexionis punctum, at angulus reflexus non à diametro bisecari, in quo casu inæquales portiones abscindentur de



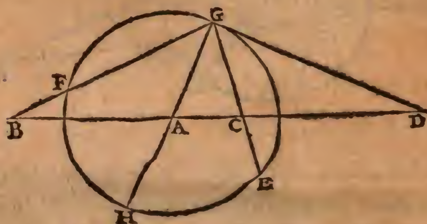
circulo, vt in præmisso problemate si pars lineæ *BC*, quæ in circulo occupatur non diuidatur (vt in *E*) bifariam, & fiat *BE* ad *EC*, ita *BD* ad *DC*, facto deindè super *DE* semicirculo, & ductis *DG*, *EG* constituetur angulus *DGE* rectus, & porrectis *CG*, *BG* etiam anguli *HG*K, K*GB* pares euadent ex demonstratis lemmate secundo, verum lineæ in circulo inæquales erunt *GI*, *GH*, quia diameter non est linea *G*K angulum reflexum bisecans, quare latius patet inuentio puncti reflexionis, quam ratio rescindendi à punctis positione datis portiones de circulo æquales, quæ perpetuo á diametro bisecari angulum exigit reflexũ.

PRO-

PROBLEMA QVINTVM.

Datis ijsdem, & linea iungens transeat per centrum, idem præstare.

HOc quippè perfacile est; nam ex ostensis, si fiat *BA* ad *AC*, ita *BD* ad *DC*; & tangat

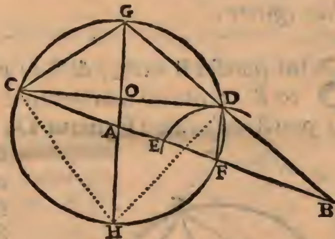


DG in puncto *G* circulum, productis namque *BG* *CG* lineis, ac diameter *GH*, palam fit ex citato lemmate secundo, quod anguli *BGA*, *CGA* sint pares, & vt supra reliqua consequentur.

PROBLEMA SEXTVM.

Datis circulo, & punctis, quorum altero sit in peripheria circuli, altero verò extra, lineaque iungens transeat per centrum, idem efficere.

SIT *B* punctum extra, *C* in peripheria, & ex hypothesi cum transeat *BC* per A centrum, secetur diameter *CF* in puncto *E*, vt fiat *C E* ad *EF*, ita *CB* ad *BF*, & portio *FE* aptetur circulo in *FD*; porrò linea ex *B* per D dabit in peripheria punctũ G, & hoc aio,



efficere quæsitum. Iungantur CG, HC; HD, & quoniam anguli CGH, CDH æquales sunt, & æquales DCG, DHG, nec non alij ad vertices, plus quam similia erunt triangula HOD, COG, sicuti duo alia HOC, DOG, ideo homologa latera erunt in eadem ratione, nempè *H*O ad OD, vt CO ad OG, & iterum HO ad OC, vt DO ad OG, & permutando H*O* ad DO, vt *OC* ad OG, ergo æquales erunt DO, & *QC*, & super diametrum GH ab angulis rectis cadentes,

 effi-

efficientur anguli GHD, GDO, ex 8 ſexti æquales, & ad O recti, vnde anguli GCO, GDO æquales; ergo triangula ſimilia, & æqualia CGO, DGO, punctum G reflexionis, & biſectus angulus BGC reflexus à diametro.

PROBLEMA SEPTIMVM.

Datis iiſdem, & lineà iungens non tranſeat per centrum, idem efficere.

SInt puncta B extra, & C in peripheria, linea vero BC centrum non occupet A, agatur tangens, vel punctum in arcu ſignetur D, & pars DE comprehenſæ peripheriæ ſecetur per æqualia in *F*, per quod punctú ſi ex *B* agatur linea, ſignabit *G* in peripheria, quo fieri quæſitum ſic oſtendetur. Iungantur *CG*, *CH*, *CF*, & diameter ducta *GA*, efficientur triangula GCH, GFH, & ſupra oſtendimus, neque hic eſt opus iterari tám CO, quám OF eſſe mediam inter partes diametri *HOG*, ita vt æquales

les ſint, hoc eſt ſecta ſit bifariam CF à diametro, ergo ad angulos pares, & aſſumpto OG communi, duo latera CO, OG duobus lateribus *FO*, *O*G æquantur, & angulos continent æquales, quare baſes CG, GF ſunt æquales, & angulus BGC dirimitur bifariam à diametro, & idcircò eſt reflexus, G vero punctum reflexionis quæſitum.

PROBLEMA OCTAVVM.

Dato circulo, & punctorum altero in peripheria, altero intra, & linea iungens illa per centrum non tranſeat, idem punctum reperire.

SIt B in arcu, C intra ſpatium circuli, agantur per centrum BD, CE lineæ, & diſtantia BD, centro facto in C, & viciſſim diſtantia CE, centro in B duæ ſcribantur circulorum portiones ſe ſecantes in puncto F, ex quo per centrum agatur FAG, erit G punctum quaſitum, & cum conſtructio concurrat cum primo problemate, hìc ali methodo ordinabitur demonſtratio, Sumantur æquales GC, GK, & connectatur Ck,

ficri ad diametrum perpendicularis progreſſu oſtendetur, nam iuncta AK, duo triangula GAC, GAK ſunt ſimilia, & ęqualia, quia ęquãtur reſolutę partes ex 12 libri 2 GA, AC quadrata † GAL bis rectangulo, ęquantur *GA*, *A*K quadratis † *GAL* bis eodem, & ſublatis denominatis ęqualibus *GAL* bis rectã-gulo, & quadrato GA, relinquuntur æqualia quadrata AC, AK, & latera, à quorum quadratis dempto communi AL, relinquuntur quadrata duo CL, LK æqualia; igitur biſecta eſt *CK* ad angulos rectos, & per ęqualia à diametro GAL: ergo angulus LGC æquatur angulo bGL, & fit angulus totalis BGC reflexus, vt punctum G reflexionis, & conſtat propoſitum.



S C H O L I V M.

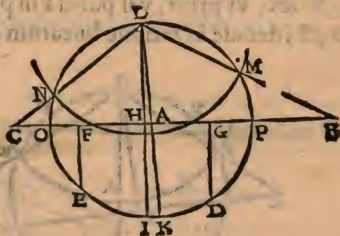
POterat etiam ducta BC ita ſecari in puncto I in ratione BD, ad CE (vel ob faciliorem ſectionem harum aliquotę partes) & per punctum *I*, & centrum in idem incidiſſet punctum *G*; verum conſtructio fit citra dubium per circulorum duorum mutuam ſectionem accuratior.

PRO-

PROBLEMA NONVM.

Dato circulo, & duobus punctis extra, linea vero iungens per centrum transeat, idem punctum inuenire.

SInt B, C extra, intelliguntur ſemper inæqualiter á centro diſtare, vt aſſequatur quęſitum, primo còntactus puncta ad eandem partem ſignentur ex datis, ſintque D, & E, à quibus demittantur ſuper BC duę perpendidulares *DG*, EF, deindè compreheſa *FG* portio ſecetur in H puncto æqualiter, à quo ſi linea eleuetur perpẽdicularis HL, erit L punctum quęſitum. Demittatur per centrum LAK, & iungantur BL, CL, erunt duo BHL, CHL triangula rectangula ad angulum compoſita, quare eadem differentia eſt angulorum BLH, & CLH, quę viciſſim reliquorum LCH, LBH, Ideò ſi ſemiſſis exceſſus anguli BLI ſupra angulum CLI, ſeu arcus *MPI* ſupra arcum *NOI* minori apponatur *NI*, ſcilicet arcus *IK*, efficientur arcus *MPK*, et *NOK* ęquales, ſeu anguli *BLK*, et CLK, ergo complementa

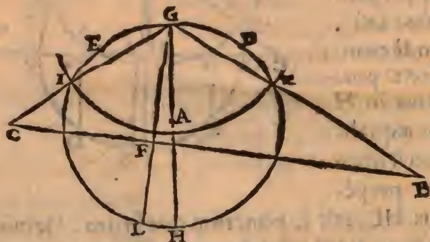


ad ſemicirculos *LM*, *LN* ęqualia erunt, vnde angulus ſecatur reflexus BLC à diametro ęqualiter, et conſtat propoſitum.

PROBLEMA DECIMVM.

Iiſdem datis, linea vero connectens puncta non tranſeat per centrum, illud idem determinare.

SInt *B*, *C* puncta extra circulum, à quibus tangentes, vt prius, vel puncta in peripheria ſignentur *D*, *E*, deindè in ratione linearum *BD*, *CE* iuncta *BC*,



ſecetur in *F*, à quo puncto ſi eleuetur perpendicularis *FG*, erit in peripheria punctum *G* efficiens quæſitum. porrigatur in *L*, & per centrum agatur *GAH*, fiet arcus *LH*, ſeu angulus *LGH* ſemidifferentia anguli *BGF* ſupra angulum *CGF*, quæ minori addita, æquales redduntur *BGH*, *CGH*; ergo ductę *BG*, *CG* conſtituent angulum biſectum per diametrum, & patet intentũ.

SCHO-

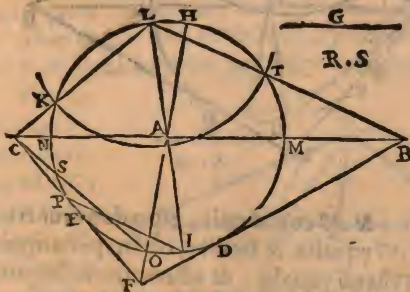
SCHOLIVM.

INcidenter hìc offertur alia ratio conſtruendi triangulum ex datis baſe, lineaque angulum verticis biſecante, vna cum proportione laterum, diuerſa quatenus nobis contigerit videre ab alijs conſtructum, ſit itaque.

PROBLEMA VNDECIMVM.

Sit BC linea pro baſe, ratio laterum R ad S, & magnitudo lineæ biſecantis angulum verticis G, oporteat triangulum conſtruere.

SEcetur baſis *BC* in ratione laterum *R* ad *S* in puncto *A*, in quo facto centro, amplitudine li-



neæ datæ *G* ſcribatur circulus, deindè á punctis datis extra *B*, *C* agantur lineæ contactus ad eandem partem,

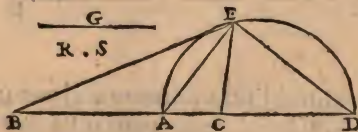
tem , quæ coeant in puncto F , ex quo per centrum ducta ſit *FAH*, porrò arcus *NH* reportetur in *NI* , & à puncto *I* per centrum iterum acta linea, erit in peripheria datum ſignum *L* , & eſſe id quæſitum progreſſu oſtendetur . Ex punctis *B*, *C* iungantur ad *L* lineæ *BL* ; *CL* , triangulum *BLC* habebit baſim ſectam in *A* data R ad S ratione ; agatur *IP* æquidiſtans *LB* , & iuncta *CSO* , quoniam *NH* , *NI* fuerant æquales, & duæ *HL* , *IO* portiones ex aduerſo æquales , relictę etiam *NL* , *NO* fiunt ęquales, ſed *AL* , *AO* ſemidiametri , & *AC* communis , ergo duo ſunt triangula *CAL* , *CAO* ęqualia, & ſimilia , ob latera duo, & angnli comprehenſi ęquales , & aſſumptis rurſus portionibus *HL* , & *OI* à ſemicirculis *HSO* , *LPI* , ſi communis arcus LS ſubducatur , erunt relicti arcus SO, PI , ęquales , à quibus ablatus iterum communis *OP* , re-

lictę

lictę portiones *SP*, *OI* æquantur: ſed *IO* eſt æqualis *HL*; ergo *HL*, *SP* æquales, ac communis *LS* ſuſceptus arcus erunt compoſiti *HS*, *LP* arcus iterum ęquales, quo circa inſiſtentes anguli *LIP*, *HOS* erunt æquales: at *LIP* erit coalterno *BLI* æqualis ob æquidiſtantiam *BL*, *IP*, & angulus *HOS* oſtenſus fuit æqualis *CLI*; ergo duo anguli *BLA*, *CLA* æquales fiunt, & dirimitur totus verticis angulus *BLC* bifariam á diametro, ſeu ſemidiametro aſſumpta ęquali lineę datę *G*: ergo habet triangulum *BLC* conditiones requiſitę, & factum erit quod oportuit:

SCHOLIVM.

EFfectio pręmiſſi problematis vniuerſalior videtur quàm inducta ab anteceſſoribus, quę ſic ſe habet. Data ſit pro baſe *BC* ſecta in *A* pro ratione data *R* ad *S*, & linea biſecans angulum verticis ſit *G*, vt prius. Protrahatur *BC* in *D*, vt eadem ſit ratio *BD* ad *DC*, quę *R* ad *S*, ſeu *BA* ad *AC*, & ſcripto ſuper *DA* ſemicirculo, in eo ponatur *AE* ęqualis *G*, & connexis *BE*, *CE*, *DE*, fiet triangulum quęſitum *BEC*, nam ex ſuperius oſtenſis anguli *BEA*, *AEC* ſunt ęquales,

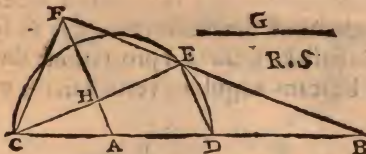


& conditiones reliquæ expletæ ; verum constructio hęc fit conditionata, vbi opus est, data *G* externa, fiat minor ipsa *AD*, aliàs triangulum haud constituetur; poterit adhuc vniuersalis ita proponere.

PROBLEMA DVODECIMVM

Data linea pro base, ratione laterum, & magnitudine linea bisecante angulum verticis inuenire triangulum.

SEcetur linea basis *BC* in *A* in ratione data *R* ad *S*, & in *CAD* diametro, facta nempe *AD* ęquali *AC*, semicirculus scribatur *CED*, erit *DB* differentia partium: fiat deindè vt *AB* ad *BD*, ita data externa ad aliam, & sit *DE*, in circuloq; aptata, agatur per *E* pũctum ex *B* indefinitè linea; porro ex *A* eleuetur linea ęquidistans *DE*, & sit *AF*, quę occurrat *BE* in *F* puncto, cui iungatur *CF*, & *CE*. Dico triangulum *BFC* esse quęsitum, ob rectum *CED*, erit & rectum *CHA*, diuisaque bifariam *CE* in *H*, & communis *HF*, vndè fit quòd *FE*, *FC* sint ęquales, & angulus *CFE* bisectus, cumque



que sit, vt *AB* ad *DB*, ita *FB* ad *BE*, & per conuersionem *BA* ad *AD*, vt *BF* ad *FE*, & *AD* ad *AC*, vt *EF* ad *FC*; ex æquo igitur erit, vt *BF* ad *FC*, ita *BA* ad *AD*, ratio laterum eadem, quæ basis segmenta: factum igitur, quod oportuit, & sequebatur ex ipsa *BFC* anguli bisectione vt in elementis patet.

SCHOLIVM.

EXhibita, ni fallor, sunt symptomata omnia de reflexionis puncto in caua peripheria circuli, plani scilicet secantis conum, seu cylindrum; & quo ad illud punctum communicat circulus cum sectionibus cæteris, adeo vt facilè ad omnes alias extendiqueat præmissa doctrina, verum integrè ad argumentum minime satis fuerit factum, nisi subrogetur pro conuexis vnum, vel alterum problema, in ijs tot discrimina casuũ ob puncta non contingunt. Sit igitur

PROBL. DECIMVMTERT.

Dato circulo, & duobus punctis à centro inæqualiter distantibus, inuenire reflexionis punctum in conuexa peripheria.

SInt *B*, *C* puncta positione possibili ad circulum circa centrum *A*, & signentur *D*, *E* puncta contactus, ipsæ vero lineæ *BD*, *CE* ad angulum inclinen-

tur *BFC*, quem bifariam diuidat linea *FIG*. Dico quod *I* punctum in peripheria eſt quæſitum, nempè ductis *BIM*, *CIK*, angulus *BIC* biſecari à diametro, producta *AIN*, & portiones *IM*, *IK* æquales in circulo fieri: ſumantur *AC*, *AO* ęquales, & iungatur *CO*; erunt triangula *AIC*, *AIO* æqualia, & ſimilia, nam duo quadrata *AI*, *IC* vna cum facto bis ſub *AIN* oblongo æquantur *AC* quadrato, hoc eſt *AO*, cui reſpondent reſolutæ partes *AI*, *IO* quadrata vna cum facto bis ſub *AIN* rectangulo; ergo ſublatę ſub vna denominatione partes *AI* quadratum, & bis facto ſub *AIN*, relinquũtur *CI*, *IO* duo quadrata æqualia, & ipſa latera: ergo anguli *ICO*, *IOC* æquales, & æquales erant in altero Iſoſcele *ACO* anguli *ACO*, *AOC*, à quibus ſublati partiales relinquuntur æquales *ACI*, *AOI*, & triangula *AIC*, *AIO* erunt trium æqualium laterum omnino ſimilia, & æqualia, & linea *AIN* fiet ſuper *CO* ad rectos angulos; igitur duo triangula *CIN*, *OIN* partialia erunt ſimilia, & æqualia, vnde angulus *OIC* erit biſectus à continuata diametro *AIN*, ſiue anguli verticales in circulo *AIM*, *AIK* æquales



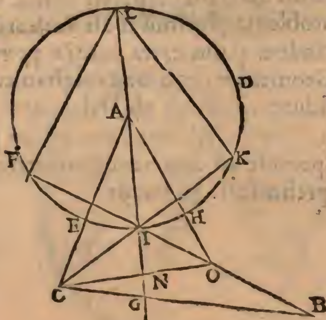
inter

inter se, ergo arcus *LM*, *LK* æquales veluti *MI*, *KI*; & est *OI* vna linea cum *BI*, ergo factum est quod oportuit.

PROBL. DECIMVMQVART.

Datis iisdem, aliter idem reflexionis inuenire punctum.

SInt B, C puncta data, circulus vt prius circa A centrum, & puncta tangentium ex aduerso notentur, ex *B* in *E*, & ex *C* in *H* lineas duci non oportet, arcum comprehensum duobus punctis *HE* secabimus ęqualiter, at linea ducetur per centrum, nempè *LAIN*. Dico punctum *I* esse illud reflexionis quęsitum: ducantur *BIF*, *CIK*, et *BC*, porro sumatur *AC* ęqualis *AO*: erunt triangula *ACO*, *CIN* isosceelia, et diuiduntur per *AN* diametrũ continuatam in partialia *ANC*, *ANO*, et *INC*, *INO* ęqualia, et similia, nam ex ęqualitate *AC*, *AO* ostendentur vt supra similia &



ęqualia AIC ; AIO triangula , per resolutionem ex duodecima Secundi, nec non et similia, et ęqualia ali a duo triangula *ICN*, *ION*: sed *BOI* est linea vna continua , ergo à datis punctis *B* , *C* angulus reflexus in conuexa fit peripheria *BIC*, á diametro bisectus; quare I punctum erit reflexionis quęsitum .

SCHOLIVM.

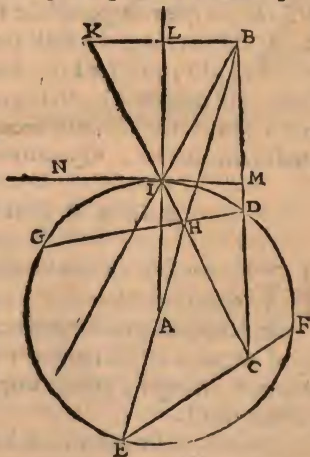
SEquitur quod LIF, LIK verticales sunt pares, vnde et lineę in circulo adplicatę ęquales IF , IK ; vt sunt reliquæ LF, et LK. Cæterum hìc alias construendi formas lubentes omittimus, quum parum à præmissis differant; superest adhuc vt aliud construamus problema plurimum ab authoribus exagitatum , ac tandem quum extra naturæ præmerent vestigia cum Geometriæ probro ad mechanicum se receperant subsidium, habetur ab Halahazen libro 5 propositione 36., et à Vitellione libro primo propositione 135, at spectasse ad ditionem geometriæ paucis sumus comprehensuri. Sit itaque

PRO-

PROBL· DECIMVM QVINTVM

Datis duobus punctis, vno in circulo, alio extra, vel vtroque extra circulum, possibile est inuenire punctum in circumferentia dati tirculi, ita vt angulum contentum à lineis à prædictis punctis, ad punctum inuentum ductis diuidat per æqualia linea in illo puncto circulum contingens. est Vitellionis 135 primi.

SINT data puncta *B* extra, *C* intra circulum cuius *A* centrum (casus reliqui sequentur infra) oporteat duas ad circumferentiam inflectere lineas, & angulum quem facient, bifariam dirimat contingens linea eodem púcto erecta. Iungantur lineæ *BC*, qua circulus secabitur in *D*, & *BA* per cẽtrum, & secabitur altero punctorum in *E*, agatur *ECF* linea ex duobus punctis datis, & eidem æqualis aptetur ex *D* dato linea *DG*, qua secabitur *BGE* in *H*, & per hoc punctum si ducatur ex *C* linea



linea dabit in peripheria punctum *I*. Aio hoc signo effici quæsitum, nempè inclinatis lineis *CI*, *BI* angulum bifariam dispescere contingens linea circulum in eodem puncto *I* erecta, quod sic demonstratur. Accipiatur *I*K in porrecta *CI*, æqualis *BI*, & continuata ex centro *AI* offendet in connexam *B*K in puncto *L*; cum autem *MI* contingat, angulus rectus erit *AIM*, vt etiã *LIN*, & in isoscele *BIK* anguli supra basim *BK* fiunt æquales; ergo duo triangula *BIL*, *LIK* duo latera *BI*, *IL*, & *IK*, *IL* æqualia habentia, & eidem lateri opposita; ergo similia, & æqualia erunt eadem triangula *BIL*, K*IL*: quare & parallelæ sunt *BK*, *MI*. Ideò latera *CB*, *CK* in triangulo *CB*K secta erunt analogicè, & vt *CM* ad *MB*, ita *CI* ad *I*K, hoc est *CI* ad *IB*; secatur basis *CB* in ratione *CI*, *IB* laterum, ergo per elementum 3 libri 6 angulus *BIC* secatur bifariam abs *MI* æquidistante baseos. Quod fieri fuerat imperatum.

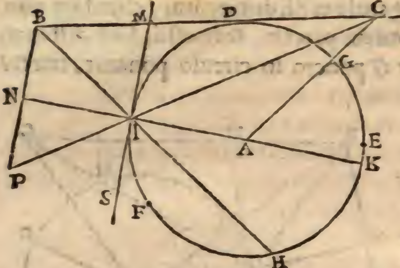
ADNOTATIO.

HInc conspici facilè est tum intra, tum extra punctum reflexionis fieri commune; immò ex B in *C*, aut è contra idem commune adhuc haberi, & ex eo quod angulus *BIC* à tangente bifariam secatur argumentum insurgit, quod angulos contactus non sit penitus nihil.

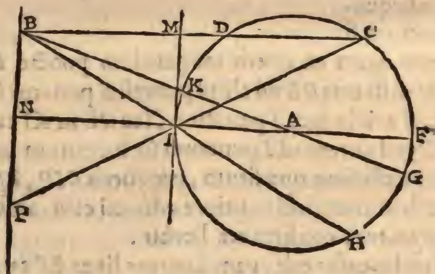
Secundus sit casus cum linea iungens puncta *BC* tota supra, siue extra circulum cadit, vt in proximo schemate; agantur ad *A* lineę *CA*, *BAG*, deinde ex *B*, *C* signen-

C signentur tangentium (si ducerentur) circulum puncta D, *E* ad eandem partem, & iuncta, siue distantia accepta *DE*, ex *G* puncto in circulo ponatur, erit *GI* (neque hæc ducta est linea) vel sanè ducta altera diametro *DAO*, abs quadrato huius si auferri cōcipiatur quadratū cordæ *DE*, relinquentur cordæ arcuum *DI*, *LO* æquales: vel facilius assequetur punctum si diametro ducta ex altero tangentium puncto *D*, vt *DAO*, & distantia *OE* ad aliud punctū *E* ponatur in *GL*, & ex *LAI* erit in arcu *I* punctum, seu *OE* in KI expeditius. Quod autem ad *I* punctum sic inuentum inclinatæ *BI*, *CI* efficiant quæsitum, productis *CIP*, *BIF*, & in sequelam ratiocinii in priore adducti casu, absque eo quod iteretur, confirmare licebit.

Tertius casus erit, cum iungens linea *BC* tangit in *D* peripheriam circuli, tunc sint *F*, *E* tangentium puncta ex *B*, & *C*, & ducta *CA* secabitur in *G* peripheria; accipiatur portio *GE*, quæ in *FI* translata, dabitur punctum I efficiens problema, quod vt in cæteris pote-



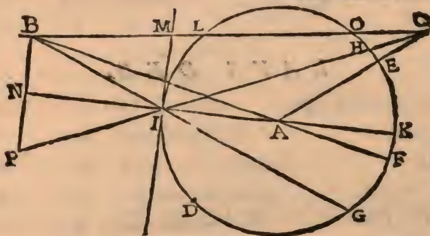
rit cõfirmari. Quartus casus erit quum alter punctorum in ipsa consistat peripheria, vt *C*, & *B* extra, tunc ductis *BC*, *BAG*, illa secabit in *D*, hæc vero in K peripheriam, & tunc minima adhuc erit difficultas, nam duplicabis *CD* in *DI*, & erit I quęsitum punctum, seu interceptæ *D*K assumens



semissem K*I* in idem recidet I punctum, & iste casus germanus fuerat in opusculo de reflexionis puncto, at ibidem schema non legitimum.

Quintus

Quintus, & postremus est casus, quum linea iungens data *BC* puncta secet circulum in *L*, &*O*, imperatum efficere; Agantur per centrum *BAF*, *CA*, & ex *B* linea contingens sit ad punctum *D* (quæ duci non oportet) deinde distantia ex *E* puncto (vbi *CA* peripheriam secat) ad punctum *D* referatur ex *F* puncto diametri



in *FI* (neque lineæ istæ designatæ habentur) Dico puncto *I* fieri quæsitum, hoc est inclinatæ *BI*, *CI* ad angulum *BIC* eundem angulum contingens *MI* bisecare, & expleta preparatione, vt in superioribus eadem conclusio eruetur, vt reiterari non sit opus.

ADNOTATIO.

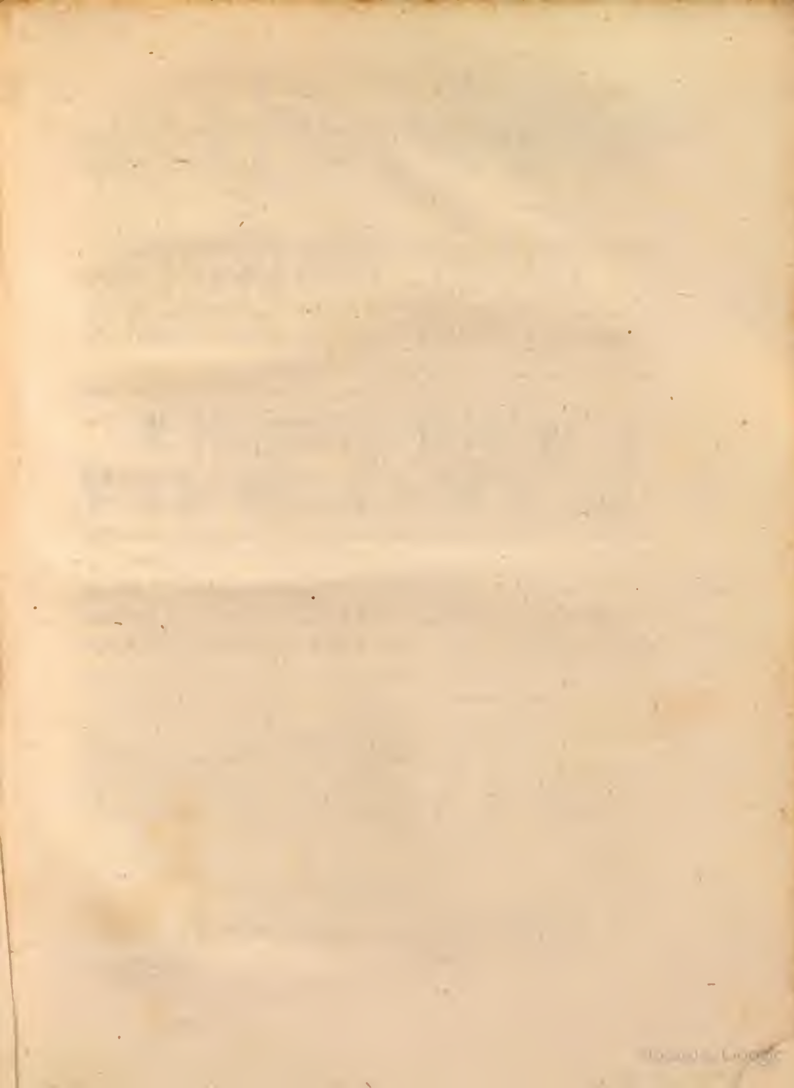
ITaq; hiſce paucis aſſumpta á nobis problemata tria geometricæ ditioni fore reſtituta ſperamus, vtinã quæ ex prçclaro illo opere ſuperſunt, & eadem laborant indigentia, demum à violenta mechanicorum detentione vindicentur.

LAVS DEO.

Errata.			*Corrigenda.*
Pag.	*Linea.*		*Lege.*
5	6	mouerct	mouerat
10	21	† ALQ	† ACQ
	23	HLQ	HFQ
21	2	*à fine*, ad H	ad E
27	14	*verba)* *sic corrigantur.*	ἐπιστημονικῶς
30	8	*græca)*	ἐπιχειρήμασι
31	4	*à fine*, perfrui	perfici
37	17	latus DE	latus DF
42	8	H circulus	*adde* H circulus bifariã
	18	iuncta DLK	iuncta HLK
49	4	*à fine*, ſit poteſt	ſit potens
51	18	--mate ſecundo	--mate ſequente
71	6	CI . IB, IH, B	CI, IB, IN, B
	21	triens ADH	triens ADN
72	4	-- do, alterni,	-- do alternè
77	2	*verb. græc. ſic cor.*	εἰς ἄπειρον
86	2	FHF	FHC
86	10	periphari	peripheria
86	14	& LN, DC	& DN, LC
88	15	in O, pucto	in O puncto
95	13	proo liues	procliues
105	22	nequeant	queant
126	9	825, 16	825, 616
133	15	LBF	LBE
138	4	Tynheni	Tyrrheni

Errata

Errata.			*Corrigenda.*
Pagina	*Linea.*		*Lege.*
143	3	, & ON	& NM
148	21	A ad C	BA ad AC
163	3	ad AD	ad AC
165	6	*à fine*, CIN Itoſcelia,	CIO Iſoſcelia
167		*vltima* BGE	BAE
168	4	*à fine* angulos	angulus





PROBLEMA VINDICATVM.

Illuſtriſs. ac Erudiſs.

D. N. THEVENOT

A. SANCTINIVS S. P.

TVtelam eius cauſæ V. C, quæ ab omnibus habeatur pluſquam deſerta, ſiue infirmitatis omnimodè amiſſæ spei, curam ſuſcipere, actiones vtique ſunt ex ſui natura adeò præſumptionis extremæ, quod á temeritatis nota vix per latum lineæ, quo caret, cenſentur diſtare, at quidem aliquando ſi videantur ad votum contingere, caſui meritò oporteat adſcribi: illarum ſcilicet proceſſus nullum ex arte poſt ſe relinquunt veſtigium. Ego quippè vel in eorum altero ſuſpicabar incidiſſem diſcriminis momento, ex quo in animum verſabar, aduerſus omnium placitum, ex viribus Geometriæ liceret hauriri rationes pro conſtructione problematis, cuius argumentum in præmiſſo fecimus libello, & quia ad ſecundum eius problema, in quadam notatione, & de altera methodo ſpecimen reliquimus, abſque eo quod per omnem differentiam caſus explicarentur, viſus ſum porrò nullam imposterum contingere poſſe oportunitatem magis congruam illud perficiendi, quám ſi vna ſimul ederentur, quare & poſt reliqua typis expreſſa tuo nomini hæc pauca nuncupari libuit, vt mea erga te obſequia; quibus obnoxium me tua fecerat humanitas, & excitarem, & ſimul publicè atteſtata euulgarem, quod ſanè nil minus fore ingratum tibi ſuadeor.

Cæterum quàm maximè mihi incumbebat, ob

nimiam

nimiam plurium importunitatem aliquid rationis exponere cur pro exiguo hoc opusculo permiserim tam adeò enormes Editio implorasset morarum inducias; immò super addam, me non semel in eam descendisse cogitationem, quod vel ad euitandas molestias, vel ne actum elegantius inutiliter alij æmularentur, satius fuisse supprimi quam luci committendum; ratio cogitatus eiusmodi fuerat, monitum à multo receptum tempore. In Belgio expediri sub prælo rerum geometricarum ingens volumen, cui impositum fronti inter Heraclæas (*Plus vltra circuli quadratura*) ex circùm lato folio cernere licuit, vndè non ne debueram tunc concipere exequatam fuisse priùs lacunam hanc, á viro scilicet eruditissimo, & ad labores geometricos sustinendos vtiq; nato, ac ad Zetesim omnibus numeris instructo? Interim allata exemplaria cum euoluerem occurro ad propositionem 158. libri octaui, vbi fusè de proportionalitatibus, & in Corollarium ibidem inter alia sequentia sunt verba mihi fol. 946.

„ *Ita partitio rationis, vt peripheriæ in tres æquas*
„ *partes, adhuc in Geometricis desiderari.*

Paulò post Romæ editum fuit aliud geometricum opus, cui author, haud doctrina minus, quam genere clarissimus, titulum fecerat, Hemispherium dissectum, in eo reperio ferè ad calcem suæ anacephaleoseos, mihi fol. 240 (fortè ex serie 236) hæc sequentia verba.

„ *Manifesta satis ex præmissis apparet ratio, quare*
„ *multa problemata non sunt demonstranda per media*

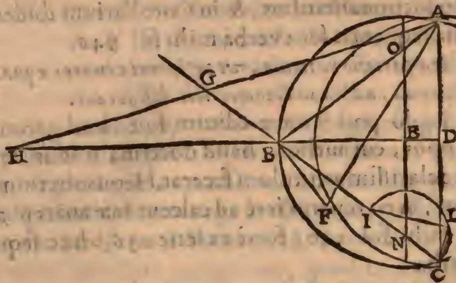
 „ *plana*

„ *plana , vel Euclidis elementa.* Et paulo infra. *Natu-*
„ *ra enim non permittit, quod per triplicem rationem ipsa*
„ *fecerit, per duplicem resoluatur.*

Et hisce quidem videtur vlterius aliquatenus progredi ad infirmandum primarium geometriæ genus, cæterum absq; controuersia est non sufficere Euclidis pro latitudine facultatis, at exquiri aliorum elementa. Neque videntes alios (nescio an proprius dixerim exscriptores quam auctores) quiescere à repetendis antiquorum geometriæ inuisis, tandem vt nostra aspiciat lucem permissimus, quid verò de exitu, non est meum enunciare, quò ad iudicatum methodum est vt sequitur & quidem

Problema controuersum iam nosti.

Sint datæ *BG*, *HG* angulum *HBG* efficientes recto minorem, præfinita *AB* intercipienda, vt pertineat ad *A* punctum datum, Demittatur in *BD* ex *A* perpen-



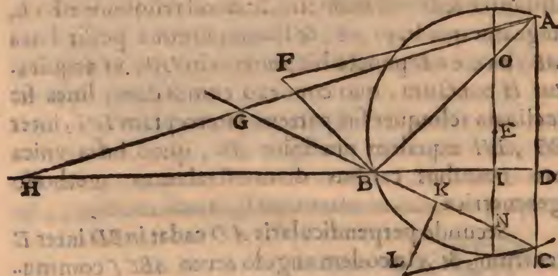
dicularis concurrens cum *GB* in puncto *C*, erit trian-
gulum

gulum *ABC* circa quod scribitur circuli portio; (& hucusque omnibus infra figuris communis fiet constructio) quæ suscipiet angulum *ABC* acutum, obtusum, vel denique rectum, sit in prima figura angulus acutus, & *AD* cadat super lineam euntem per centrum *E*, quare Isosceles erit triangulum *ABC*, cui Basi, *AC* æquidistet diameter per *EN*, quæ secabitur in *NO* à lateribus trianguli, & resectæ portiones in vnam lineam positæ *CI*, ab eius quadrato auferatur quadratum *DE* distantiæ scilicet à diametro, & quod reliquum est *IL*, augeatur quadrato *AB*, & horum summa possit linea *AF*, hæc ex *D* puncto bis ponatur in *DB*, vt acquiratur *H* punctum, quo connexo cum *A* dato, linea sic inclinata relinquet sui partem interceptam *HG*, inter *BG*, *BH* æqualem præfinitæ *AB*, quod infra vnica pro omnibus casibus demonstrabimus methodo geometrica.

Secundò perpendicularis *AD* cadat in *BD* inter *E* centrum, & *A* in eodem angulo acuto *ABC* (communia cũ præmisso non repetimus) in hoc casu; ex quadrato aggregati linearũ *CN*, *AO*, hoc est *CK* si quadratum

dratum auferatur duplæ *DI*,& fiat quadratũ *KL* relicti æquetur *BF*, quod quidem auctum quadrato *AB*,illaq; potens sit linea *FA* ponenda ex *D* bis super *DB* , & habebitur *H* , ad quod iunctum *A*,linea illa iungens quęsitum præstabit .

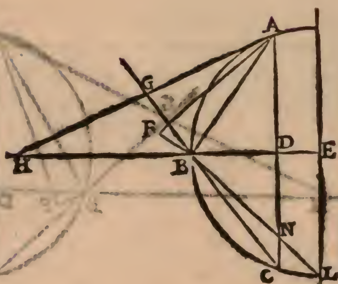
Tertio *AD* cadat super eductam *BD* infra centrum *E* in angulo similiter acuto *ABC* , tunc quadrata; iniunctæ lineæ *NC* † *AO* , vna cum quadrato duplæ



DI ,nempè quadratum *CL* augeatur quadrato *AB* , vt linea potens sit *AF* , quæ ponatur ex *D* bis super *DB*. assequetur punctum *H* pro ratione quæsiti idoneum.

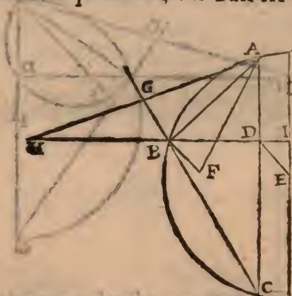
Quarto deinde in triangulo *ABC* angulum obtusum efficiens, & cum Isosceles fuerit cadet *AD* perpendicularis in centro siue *D* lineæ per centrum transeuntis, & ducta diameter æquidistans *EL* , iungatur *BL* secans *AC* in *N* , in hoc casu differentia quadratorum *NL*, *DE* sit ipsa *BF* , cuius quadratum auctum *AB*

qua-



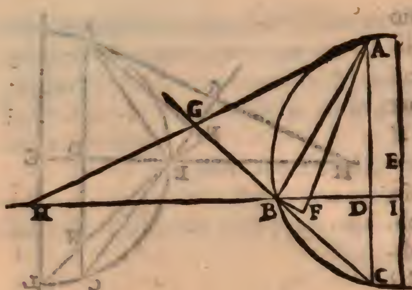
quadrato, illa duo potens erit *AF* linea ponenda ex *E* puncto bis super *DB*, & exiet *H* quæsitum.

Quinto in angulo pariter obtuso *AD* perpendicularis supra *BD* cadat inter E centrum, & *A*, acta *EI* diametro æquidistans *AC* basi trianguli *ABC*, tunc iungatur *DE*; cui quadrato addito ipsi *AB* quadrato, erit eadem iuncta *AF* potens illa ponenda bis ex puncto *I*, & -- dabit *H* quæsitum punctum.

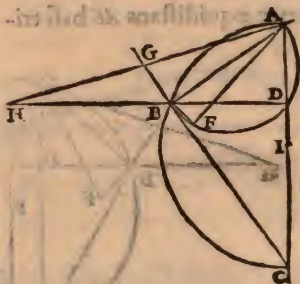


Sexto adhuc in angulo obtuso, quum super *BD* infra centrum *E* cadat *AD*, perpendicularis, vt in figura sexta, & diametro ex *D* ducta æquidistante *AC*, eo casu quadratum *AB* augeatur quadrato *BF*, æquali *DI*, & *FA*, vt in cæteris posita bis super *I* puncto in linea *DB*, dabit idem *H* quæsitũ.

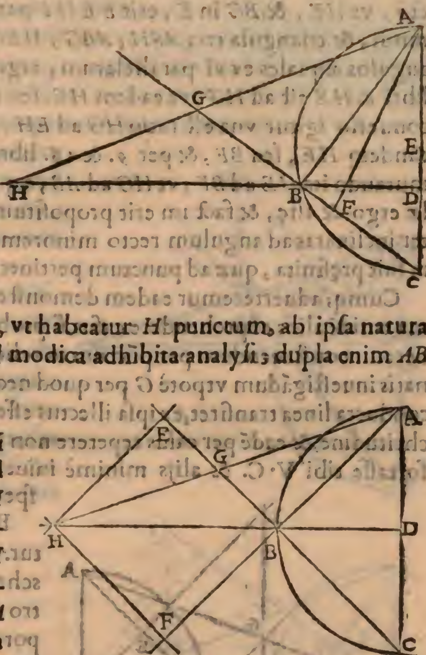
Septi-



Septimo in angulo *A BC* recto triangulum ſit ſcalenũ, vt cadat perpendicularis *B D* ſuper diametrum *AC* inter centrum & punctum *A*, eo caſu à quadrato *AB* auferatur ſemiſſis quadrati *DI* ſit *BF*, & reliqua *AF* potens reſiduũ ponatur de more bis ex *D* ſuper eandẽ *D B*, & ſignabitur *H* punctum quæſitũ ad problema, vt ſupra.



Octauo, vlterius in eodem angulo recto *ABC* trianguloque pariter ſcaleno *BD* ſuper *AC* perpendicularis cadat infra *E* centrum, & punctum *C*, quo caſu opus erit quadratum *DE* diſtantiæ à centro addere quadrato *AB*, & linea totum potens *AF*, poſita ſuper *DB*, bis exhibebit *H* quæſito idoneum.



Poſtremũ in angulo ſimiliter recto *ABC*, vbi perpendiculares *BD*, *AD* in centro cadunt, in triãgulo Iſoſcele *ABC*, vt habeatur *H* punctum, ab ipſa natura habetur, vel modica adhibita analyſi; dupla enim *AB* ſuper diametrum *DB*, oſtendit *H* pũctũ, ad quod inclinata *AH* eius pars inter poſitas *HB*, *GB*, æqualis ſit ipſi *AB*; & quia omniũ ſymptomatum vna forma ſimplici oſtendi poſſunt ad naturæ normam videtur haberi, cuius genium eſt per quã breuiſſimè operari. In adiecta igitur figura ex *H* puncto binę agantur *HE* parallela *AB*, & *HF* pariter parallela *BG*, & productę *BG*, *AB* concurrant in *F* puncto

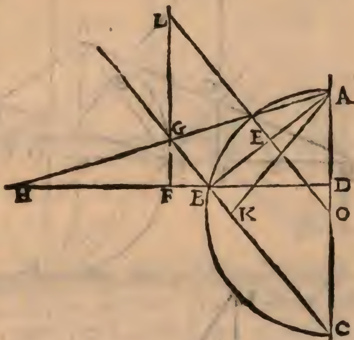
cto, vt *HE*, & *BG* in *E*, erit *B E H F* parallelogrammum, & triangula tria *AFH*, *ABG*, *HEG* similia ob angulos æquales ex vi parallelarum, ergo per 2, & 6. libri 6. *HE* est ad *HG*, vt eadem *HE*, seu *BF* ad *BA*, è conuerso igitur vna est ratio *HG* ad *EH*, quæ *AB* ad eandem *HE*, seu *BF*, & per 9. & 16. libri quinti permutando ita *HE* ad *BF*, vt *HG* ad *AB*, æquales sunt illæ ergo & istę, & factum erit propositum, scilicet inter inclinatas ad angulum recto minorem, interposita fuit prefinita, quæ ad punctum pertinet datum;

Cumq; aduerteremur eadem demonstrationis forma, totidē alios cōprehendere casus, si problema proponeretur construendum per pūctum in reliqua ex inclinatis inuestigādum vtpotè *G* per quod necessariò ex *A* conducta linea transiret, ex ipsa illectus effectionis pulchritudine, & eadē per casus repetere non grauabor, & fortasse tibi V. C. & alijs minimè iniucundum fore speramus.

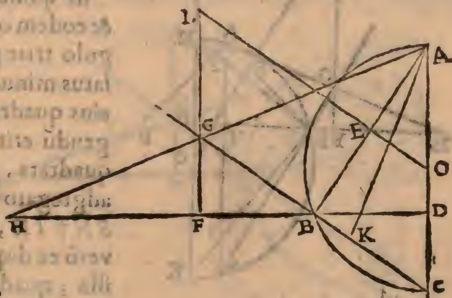
Breuiter igitur: in quolibet schemate, ex cētro circuli cuius portio quodcūq; triangulum sibi suscipit ducta est *E L*, siue *DL* parallela *BG*, & in ea scindenda pars fuerit

rit pro opportunitate casus. Et

Primum in figura prima ponatur *AB* ęqualis *EL*, & ex *L* demittatur perpendicularis *LF*, super reliqua *BH*, secabitur altera in *G* puncto, per quod conducta linea *AH*, eius pars *HG* datis intercepta, erit æqualis *AB*; quod vna pro cunctis est pręmissa demonstratio, si preparetur, vt supra.



In secunda figura, angulo *ABC* pariter recto, & scaleno triangulo cuius minus latus sit *AB*, eius quadratum augeatur quadrato *DO*, & ipsa *AK* potēs ponatur in *EL*, & demissa normalis *LF* secabit *G* aptum ad quęsitū.



 In ter-

In tertia deinde figura eodem angulo recto, & latus *AB* ſit in ſcaleno maius; eodem modo *DO* quadratum additum quadrato *AB*, idem *AK* in *EL*, &c.

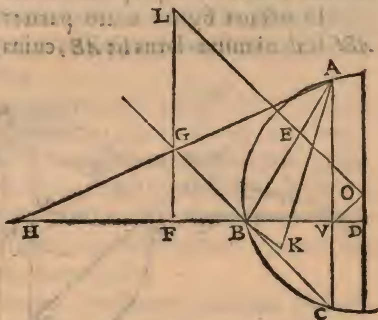
Sit in angulo obtuſo *ABC* primum triangulũ Iſoſceles quadrato *AB* addantur duo quadrata alterũ ex dupla *SK*, & alterum ex dupla *DV*, & ſint ipſa *AL* quadratum. Iuncta ergo *BI* ponatur in *EL*, vt in quarta figura, reliqua agãtur, vt ſupra.

In quinta figura, & eodem obtuſo angulo trianguli *ABC* latus minus ſit, *AB*, eius quadratum augendũ erit per duo quadrata, vnum ex adgregato linearum *SN* † *IK*, alterum verò ex dupla *VO*, ſit illa, quadratum ex

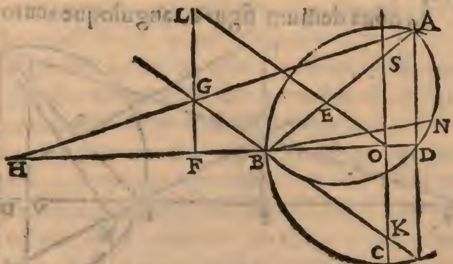
AP, li-

AP, lineà igitur (si duceretur) *BP* ponenda erit in *EL* æqualis, & reliqua sequentur vt supra.

In sexta figura eodem angulo obtuso *ABC* sit latus maius scaleni *AB*, eius quadratum augeatur per quadratum *VO*, & ipsa *AK* potens abscindatur in *EL* æqualis, & cætera sequentur.



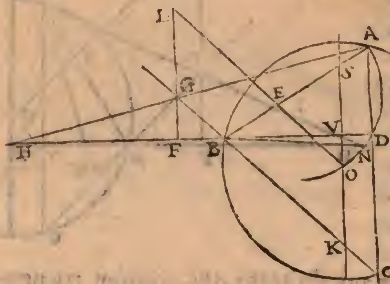
Sit porrò in angulo acuto *ABC* primùm triangulum Isosceles, vt in figura septima latus sectum *AB* opus erit minuere, quod fiet si á quadrato *AB* demantur duo quadrata, vnum ex linea dupla *CK*, alterum



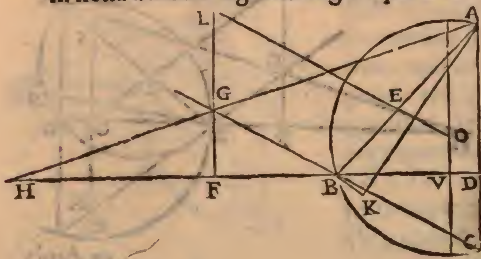
ex dupla

ex dupla *DO*, quæ duo poſſit linea *AN* (ſi ducaretur) reliqua verò *BN* ponenda erit in *EL*, vt ſint æquales, & tunc demiſſa ex *L* perpendicularis fiet quæſitũ, &c.

In octaua figura acuto pariter angulo trianguli *ABC* ſcaleni minus latus ſit *AB*, cuius quadratum ſimiliter minuendũ erit, duobus quadratis; vnum à dupla *DV*, alterum à compoſita ex *CK* ✱ *AS*, eſſet adgregatum illud (ſi duceretur linea) quod poteſt *AN*, & reliquum quadratum poſſit *BN*, cui æqualis ponatur *EL* linea, quæ reliqua præſtabit, vt ſupra.



In nona demum figura, anguloque acuto trianguli



guli *ABG* maius latus sit *AB* factus, si eius quadratum, per quadratum *DV* augeatur, linea illa potens *AK* fiet apta quæsito, scilicet posita æqualis *EL*, & demissa normalis *LF* secta erit in *G* linea *BG* per quod conducta *AGH* fiet eius pars *HG* æqualis *AB*, quod faciendum proponebatur.

Præterea methodum inducere aliam, præmissis longè vtique concinniorem, liceret, & qua pro anguli varietate *GBH* facilè expedirentur omnia symptomata, ratioque demonstrandi per æqualitatem, haud per proportionem procederet, at pro re nimium exagitata, in aliam remittimus opportunitatem; interim hoc festiuo lubeat epistolam claudi.

Eudoxus Gnidius (attestante nimirum Philosopho) ægrè tulerat ab Eutocio Ascalonita repulsam, ne in albo recenseretur eorum, qui Geometriæ tunc indigenti sua deprompserant inuenta, nunc quippè vel excitatus, Principi Euclidi accurrens se prostrauit, vt pro sphalmate admisso ex perperam conceptæ analogiæ veniam impetraret, ac simul adire facultatem eidem Eutocio protestaturus, quod relata monumento codicis molimina illicò deleret, veluti ne dùm inefficacia, verùm pluribus non modicè noxia, etenim ob antiquitati venerandæ debitum delatumq; obsequium inhibuissent, quin præclara alumnorum ingenia suas exererent vires, cui vultu quippè hilari adnuens ipse Princeps, & tanquam in disciplina educatus Pythagoræa, insuper voluit, quod authores, vt erant in albo relati sibi sisterent (salua nihilominus in reliquis omnimoda co-

da eorum dignitate præſtantia, atque ſapientia) vt corã ſpontè faterentur, licentiosè nimis ab alumnis fuiſſe prolatum, Princeps ipſe diminutus habuiſſe, doctrinam nobis relictam ſcilicet, nullò specimine cultoribus indicato pro duabus medijs inter extremas lineas, pro anguli triſectione plani, & huiusmodi tanquam ideò ad incitas reuocata facultas, cogeretur citra probrum à vernaculis improba emendicare ſubſidia, quod contrarium experitur modo elementa ex arte, vt par eſt, ac ritè componantur. Vale.

E tenebris autem, quæ ſunt in luce tuemur.

MACERATÆ,

Apud Philippum Camaccium. 1648. *Superiorum permiſſu.*

